

第 3 章 初期値

本章では、ATM の初期値について説明する。前述したとおり、移流拡散モデルでは、ある時刻 t の n 番目のトレーサーの位置 $\mathbf{r}_n(t)$ から、トレーサーの属性（粒径や密度など）とトレーサーの輸送に関する物理（移流や落下など）を用いて、時刻 $t + \Delta t$ の位置 $\mathbf{r}_n(t + \Delta t)$ を計算する。そのため、どのような属性のトレーサーが、どの位置から、いつ放出されるかといった初期値が必要となる。ATM の主な計算対象は火砕物の予測であることから、本章では、本供給源モデルの初期値の例として火山噴火時を想定した初期値の作成方法の詳細について説明する。火砕物以外の物質の輸送に関しては、対象の物質の性質や発生源の状況・特徴に応じて適切な初期値を用意する必要がある。

3.1 初期値の例：火砕物の供給源モデル

火山噴火時の噴煙柱から大気に供給される火砕物のプロファイルを計算するモデルをここでは「供給源（ESP）モデル」と呼ぶ¹。本供給源モデルでは、火山噴火時に発生する火砕物の予測を行う際には、主に Suzuki (1983)、鈴木 (1985) に基づいた供給源モデルを用いている。本節では、その供給源モデルについて説明を行う。ただし、本供給源モデルにはいくつかのオプションが用意されており²、オプションの選び方によっては、Suzuki (1983) や鈴木 (1985) とは異なる設定の初期値を作成することもできる³。

本供給源モデルでは、放出される粒径 $D \sim D + dD$ 、高度 $z \sim z + dz$ 、噴煙の中心軸からの水平距離 $r \sim r + dr$ と偏角 $\theta \sim \theta + d\theta$ 、放出される時間 $t \sim t + dt$ から、放出される質量 dM は確率密度 P を用いて次のように記述する。

$$dM(D, z, r, \theta, t) = MP(D, z, r, \theta, t)dDdzdrd\theta dt \quad (3.1)$$

dM を各トレーサーで表現することで、ATM の初期値として利用することができる。ただし、噴煙柱から離脱する火砕物の質量の合計（総放出量）を M とした。全粒径、全高度、全水平位置（噴煙の中心軸からの半径方向の距離と偏角）、全時刻において、積分を実行すると

$$1 = \int P(D, z, r, \theta, t)dDdzdrd\theta dt \quad (3.2)$$

となる。つまり、供給源モデルは、総噴出量 M を推定し、その M を各粒径、各高度、各水平位置、各時刻へどのように分配するかを表現するモデルである。

3.1.1 総噴出量

火山灰の定量的な予測のための初期値において、総噴出量は最も基本的なパラメータの一つである。総噴出量を直接測定することは困難であるため、得られた観測値から総噴出量を推定する式について説明する。

推定式については、現在の実装では下記のオプション（ベキ乗則）のみ選択可能である。

¹ 「噴煙柱モデル」または「噴煙モデル」などとも呼ばれる。しかし、Woods (1988) 以降、噴煙の力学（各種保存則など）の理解や周囲の大気場との相互作用を考慮した力学モデルの研究が進むにつれて、それらを「噴煙柱モデル」と呼びここで説明する「供給源モデル」と区別する傾向があるようである。なお、Folch (2012) では、移流拡散モデルの初期値を作成するモデルを“source term model”と表現している。

² オプションを表すスイッチ名とその値については、Table D.7 を参照。

³ 例えば、鈴木 (1985) では粒径は対数正規分布であるが、本供給源モデルでは一様な粒径分布も選択可能である。

(1) ベキ乗則 ($n_switch_calc_mass = 1$)

小屋口 (2008) のプリニー式噴火に対する次元解析によると、総噴出量は噴煙の到達高度の 4 乗と噴火継続時間に比例する。総噴出量 M は、噴煙柱の火口上の到達高度 H と噴火継続時間 T_M を用いて、次のように記述される。

$$M = K_M H^\gamma T_M \tag{3.3}$$

ただし、本供給源モデルでは、新堀・他 (2010) より $K_M = 193 \text{ kg/km}^4/\text{s}$, $\gamma = 4.0$ を標準の値としている⁴。

上記の関係式 (ベキ乗則と呼ばれる) は次元解析などの簡単な考察から導かれるものの、Sparks *et al.* (1997) や Mastin *et al.* (2009) で示される過去の噴火を集約した結果とよく一致する。Table 3.1 に他の文献も含めて係数をまとめておく。

Table 3.1 Coefficients in the power law for total mass estimation

References	K_M	γ
Sparks <i>et al.</i> (1997)	345	3.86
Mastin <i>et al.</i> (2009)	140	4.15
Shimbori <i>et al.</i> (2010)	193	4.00

3.1.2 粒径分布 (質量)

ここでいう粒径分布とは、粒径 $D \sim D + dD$ のトレーサーに総噴出量 M がどのように割り振られるか、を意味する⁵。すなわち、粒径分布を $M_D(D)$ と書くと、

$$M = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} M_D(D) dD \tag{3.4}$$

ただし、 D_{\min} と D_{\max} は粒径のカットオフである⁶。

火砕物の粒径分布については、多くの先行研究があるが、本供給源モデルでは次の 3 つのオプションが用意されている。

- (1) 単一粒径
- (2) 一様分布
- (3) 対数正規分布

それぞれのオプションについて以下で説明する。

なお、研究の分野では対数正規分布よりもベキ乗則を用いた粒径分布の方が一般的なようである⁷。理由は、ベキ乗則は火砕物の破碎のメカニズムに基づき導出されるからであろう (例えば、Turcotte, 1986)。しかし、Girault *et al.* (2014) にもあるように、適切にパラメータを選べばベキ分布か対数正規分布かの違いは小さくなく、むしろ、どのようなパラメータを使うかが重要である。パラメータとは対数正規分布では中央粒径と幾何標準偏差、カットオフ (最大粒径と最小粒径) であり、ベキ乗則では指数の係数とカットオフである。

ここで「火山灰粒子」と「トレーサー」は明確に区別していることに注意する。例えば、 10^8 kg の質量を粒径 1 mm の火山灰粒子で換算すると、火山灰粒子は $\approx 10^{14}$ 個のオーダーである (火山灰粒子を球形、密度 1000 kg/m^3 と仮定して概算した場合)。このような粒子数を直接計算することができないため、計算上の粒子 (トレーサー) に仮想的に質量を割り当てて計算する。つまり、多数の火山灰粒子を 1 個のトレーサーが代表している。

⁴この値は、新堀・他 (2010) より $K_M = 6.95 \times 10^5 \text{ kg/km}^4/\text{h}$ の単位を換算して少数第 1 位を四捨五入したもの。

⁵「粒径分布」というと、粒径 $D \sim D + dD$ の粒子の個数 $N(D)dD$ を指す場合もある。ここでは、 $D \sim D + dD$ の質量であることに注意する。

⁶VAA では $0.01 \text{ mm} \sim 0.1 \text{ mm}$ 、降灰予報では $0.65 \mu\text{m} \sim 96 \text{ mm}$ を用いている。

⁷例えば、Girault *et al.* (2014) の Table 1 には、過去の噴火事例について、ベキ乗則へあてはめた結果がまとめてある。

(1) 単一粒径 (n.switch.size.distribution = 0)

このオプションでは、ネームリストで与えた中央粒径の値が、全トレーサーの粒径に割り振られる。

(2) 一様分布 (n.switch.size.distribution = 1)

このオプションでは、粒径の対象区間 $D_{\min} \sim D_{\max}$ (D_{\max}, D_{\min} : 粒径のカットオフの上限と下限) において質量は ϕ スケールで等分配して割り振られる (なお、粒径 D を ϕ スケールで表すと、 $\phi = -\log_2 D/D_0$ である。ただし、 $D_0 = 1 \text{ mm}$ である。)。すなわち、 $D \sim D + dD$ に割り振られるの質量 $M_D(D)dD$ は、

$$M_D(D)dD = \frac{M}{(\ln D_{\max} - \ln D_{\min})} \frac{dD}{D} \quad (3.5)$$

これは、次のベキ乗則で $c = 3.0$ とした場合に等しい。

$$N(D \geq x) \propto x^{-c} \quad (3.6)$$

ここでは、 $N(D \geq x)$ は、粒径が x より大きい粒子数の合計である。なお、ベキ乗則の指数 c は噴火の事例によって異なるが、おおよそ $c=2.9 \sim 3.9$ 程度である (Kaminski and Jaupart, 1998)。

(3) 対数正規分布 (n.switch.size.distribution = 2)

本オプションでは、Suzuki (1983) が定式化で用いている対数正規分布を用いる。

粒径 $D \sim D + dD$ の火山灰粒子のもつ質量の合計 $M_D(D)dD$ は対数正規分布を仮定して、

$$M_D(D)dD = C \exp \left[-\frac{(\log_a D - \log_a D_m)^2}{2\sigma^2} \right] \frac{dD}{D \ln a} \quad (3.7)$$

ここで、 C は規格化定数、 D_m は中央粒径、 σ は幾何標準偏差⁸、 a は底を表す。なお、積分範囲が $-\infty \sim +\infty$ ならば、 $C = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ である。しかし、本供給源モデルでは、積分範囲はカットオフ (D_{\min} および D_{\max}) に依存する。

粒径 D のトレーサー 1 個の質量を $m(D)$ とすると、粒径 $D \sim D + dD$ のトレーサー数 $N(D)dD$ は

$$N(D)dD = \frac{C}{m(D)} \exp \left[-\frac{(\log_a D - \log_a D_m)^2}{2\sigma^2} \right] \frac{dD}{D \ln a} \quad (3.8)$$

本供給源モデルでは、各トレーサーが担う質量 (仮想質量⁹) $m(D)$ は、総噴出量 M を全トレーサーに等分配した量で定義する。すなわち、

$$m(D) = \frac{M}{N_t} \quad (3.9)$$

ただし、 N_t はトレーサー数である。したがって、本供給源モデルでは、粒径 $D \sim D + dD$ のトレーサー数 $N(D)dD$ は

$$N(D)dD = \frac{CN_t}{M} \exp \left[-\frac{(\log_a D - \log_a D_m)^2}{2\sigma^2} \right] \frac{dD}{D \ln a} \quad (3.10)$$

トレーサー数 N_t 、総噴出量 M は係数としてかかるだけなので、粒径分布に関するパラメータは、中央粒径 D_m と幾何分散 σ とカットオフ (D_{\max} および D_{\min}) である。

実装においては、中央粒径 D_m [m] に対して、 $\phi_m = \log_{10} D_m$ を中心とした標準偏差 σ の正規乱数 $N(\phi_m, \sigma)$ を用いて、 n 番目のトレーサーの粒径 D_n [m] は

$$D_n = 10^{N(\phi_m, \sigma)} \quad (3.11)$$

と計算される。ただし、粒径が対象区間内ならば採用し、区間外ならば不採用として計算を繰り返す (n ループ)¹⁰。

⁸ $\sigma \ll 1$ のときは、 σ の高次の項を無視すると、対数正規分布は正規分布に近似できる。

⁹粒径 $D \sim D + dD$ のトレーサーが $N(D)dD$ 個あるとすると、トレーサー 1 個は $3m(D)/4\pi D^3 \rho(D)N(D)$ 個の火砕物粒子を代表していると考えられる。

¹⁰そのためトレーサー数 N_t よりも十分に大きな繰返し回数を設定している。ある確率分布に従うサンプリングを作成する手法は、MCMC

3.1.3 密度

各トレーサーの密度 [kg/m³] は終端速度に大きく影響するため重要である。一般に、火砕物においては、粒径が小さいほど密度が大きくなる¹¹。本供給源モデルでは、次の 2 つのオプションが用意されている。

- (1) 一定値
- (2) 粒径に依存する場合

(1) 一定値 (n_switch_particle_density = 1)

本オプションでは、全粒径において設定ファイル (Table D.12) から与えた値を用いる。

(2) 粒径に依存する場合 (n_switch_particle_density = 2)

本オプションでは、新堀・他 (2010) に基づいて、粒径 D のトレーサーの密度 $\rho_p(D)$ を次のとおり定義する。

$$\rho_p(D) = \frac{\rho_{\min} + a\rho_{\max}D}{1 + aD} \quad (3.12)$$

ただし、 $a = 5000 / \text{m}$ 、小粒径極限の密度 $\rho_{\min} = 2400 \text{ kg/m}^3$ 、大粒径極限の密度 $\rho_{\max} = 1000 \text{ kg/m}^3$ である。なお、 ρ_{\min} および ρ_{\max} の値はデフォルト値であり、Table D.12 で設定する。

3.1.4 放出高度の分布

次にトレーサーの放出高度の分布を考える。放出高度の分布とは、どの粒径の粒子が、どの高度から放出されるか、を意味するものである。すなわち、粒径 $D \sim D + dD$ の粒子が、高度 $z \sim z + dz$ から放出される質量 $M_z(D, z)dDdz$ のことである。粒径 $D \sim D + dD$ の質量を $dM_D(D)$ と書いて、

$$M_z(D, z)dDdz = dM_D(D)P(D, z)dDdz \quad (3.13)$$

としたときの、確率分布 $P(D, z)$ を拡散比率と呼ぶ。 $M_D(D)$ の分布は前述したので、 $P(D, z)$ を決めることで、トレーサーの放出高度の分布が決まる。本供給源モデルでは、拡散比率 $P(D, z)$ の計算方法として、次の 2 つのオプションが用意されている。

- (1) 一様分布
- (2) Suzuki (1983) に基づく拡散比率

(1) 一様分布 (n_switch_shape_vertical = 1)

本オプションでは、どの粒径に対しても質量は火口から噴煙の到達高度 H にかけて、一様に分布する。実装では、0~1 の一様乱数 Γ を用いて、各トレーサーの高度 z_n は、

$$z_n = \Gamma H \quad (3.14)$$

と表される。

(Markov Chain Monte Carlo) 法が有名である (例えば、Aster *et al.*, 2013)。しかし、粒子数が少ない場合は、均等にばらつかない可能性もあり、動的に設定が変わる現業利用においては、実装にはそれなりの対処が必要と思われる。MCMC 法は、複雑な確率分布に対して汎用的で強力なツールだが、本供給源モデルのような単純な確率分布の場合は、本文にあるような方法で十分有効と考えられる。

¹¹例えば、Klawonn *et al.* (2014) では、 $\phi \leq -1$ では 1650 kg/m^3 、 $\phi \geq +2$ では 2600 kg/m^3 、 $-1 \leq \phi \leq +2$ は $\phi = -1$ と $\phi = +2$ の値を線形に内挿している。

(2) Suzuki (1983) に基づく拡散比率 (n_switch_shape_vertical = 2)

本オプションでは、Suzuki (1983) に基づき拡散比率を計算する。Suzuki (1983) は、拡散比率を粒径 D の粒子の終端速度を用いてパラメータ化した。ここでは、その実装について下記で説明する。

まず、高度 z における噴煙柱内部のガス流の上昇速度 $W(z)$ を次のように記述する。

$$W(z) = W(0) \left(1 - \frac{z}{H}\right)^\lambda \quad (3.15)$$

H は火口上からの噴煙の到達高度であり、 λ は 1 または 1/2 をとるとしているが運用では $\lambda = 1$ としている (新堀・他, 2010)。ただし、 $W(0)$ は火口における初速度で、次のように与える (勝井・村瀬, 1960)。

$$W(0) = W_0 \sqrt{\frac{H}{H_0}} \quad (3.16)$$

ここで、 H は火口上からの噴煙の到達高度、 $H_0 = 0.22$ m、 $W_0 = 1$ m/s である。

次に、高度 z における粒径 D の無次元化した上昇速度 $Y(D, z)$ を火口での終端速度 $w_t(D, 0)$ ¹² を基準に次のように定義する。

$$Y(D, z) = \beta \frac{W(z) - w_t(D, 0)}{w_t(D, 0)} \quad (3.17)$$

ここで、 β は離脱係数と呼ばれているパラメータで、予測に大きく影響する重要なパラメータである¹³。この $Y(D, z)$ を用いて、拡散比率 $P(D, z)$ を次のように定義する。

$$P(D, z) = AY(D, z) \exp[-Y(D, z)] \quad (3.18)$$

定数 A は規格化定数で、下記を満たすように決める¹⁴。

$$\int_0^H P(D, z) dz = 1 \quad (3.19)$$

放出量が最大となる高度 $Z_{\max}(D)$ は、 $dP(D, z)/dz = 0$ を解けばよい。

$$Z_{\max} = H \left[1 - (1 + \beta) \frac{w_t(D, 0)}{\beta W(0)} \right] \quad (3.20)$$

粒径が小さいほど噴煙柱の上部 (傘型部) からの放出が多くなる傾向がある。一方で、粒径が大きいほど、中部 (対流部) から下部 (スラスト部) にかけての放出が多くなる傾向がある。なお、Suzuki (1983) は $\beta \ll 1$ として、次のように近似した。

$$Z_{\max} = H \left[1 - \frac{w_t(D, 0)}{\beta W(0)} \right] \quad (3.21)$$

3.1.5 噴煙の形状

本項では、噴煙の形状について説明する。本供給源モデルでは、噴煙の形状として次の 2 つのオプションが用意されている。

- (1) 線 源
- (2) 逆円錐形

それぞれのオプションについて以下で説明する。

¹²火口での大気条件を用いて、第 2.2.3 項の計算方法で計算する

¹³以前は $\beta = 0.069$ が用いられていたが、現在、 $\beta = 0.017$ が使われている (鬼澤・他, 2013)。

¹⁴厳密には、粒径によって積分範囲が異なる。なぜなら、大きな粒径に対しては、 $Y(D, z) < 0$ の領域が無視できないためである。その結果、 $P(D, z) < 0$ となる高度が現れる。それを回避するために、 $P(D, z) \geq 0$ の範囲で粒子を分布させている

なお、このオプションは予測結果には大きく影響しない。(2) 逆円錐形を選んだとしても、最高高度付近の水平方向の広がりが高々数 km 程度である¹⁵。すなわち、両者のオプションの違いは、初期値としてのトレーサーの位置が最大でも数 km ずれている程度である。この数 km のずれが予測に影響するのは、主に火口のごく近傍に落下する粒子である。

(1) 線源 (`n.switch_shape_horizontal = 1`)

このオプションでは、噴煙の形状は線源が仮定される。すなわち、すべての粒子は火口直上から放出される。一見すると不自然ではあるが、前述したとおり、火山灰雲やある程度遠方の降灰の予測をする上では、大きな問題はない。実際、多くの研究では線源が仮定されている¹⁶。

(2) 逆円錐形 (`n.switch_shape_horizontal = 2`)

このオプションでは、噴煙の形状は逆円錐形が仮定される。小屋口 (2008) の次元解析によると、プリニー式・ブルカノ式のいずれの場合も高度 z における噴煙の水平方向の広がり $R(z)$ は、

$$R(z) = K_r z \tag{3.22}$$

と記述される。係数 K_r は次元解析からは決まらない無次元量であるが、Turner (1962) から $K_r = 0.198$ を用いている。

高度 z から放出される粒子の噴煙の中心軸から動径 $r(z)$ と偏角 $\theta(z)$ は、 Γ_1 および Γ_2 を $0 \sim 1$ の間の一様乱数として次のように表される。

$$r(z) = \Gamma_1 R(z) \tag{3.23}$$

$$\theta(z) = 2\pi\Gamma_2 \tag{3.24}$$

3.1.6 放出時刻

噴火発生時、火口から放出された火砕物は、周囲の大気を取り込みながら上昇していく。最高高度に達するまでの時間は、噴火の規模にもよるが数分から数 10 分程度である。したがって、噴火直後には、高高度に火山灰粒子は存在せず、噴煙柱から離脱し、周囲の風によって輸送される火山灰は低高度からの放出のみであろう。このような噴煙の形成時間を考慮して個々の粒子の放出時刻を粒子ごとに設定する。本供給源モデルでは、形成時間の計算方法は次の 2 つのオプションが用意されている。

(1) 一様

(2) 高度に依存した放出時刻

それぞれのオプションについて以下で説明する。

(1) 一様 (`n.switch_emission_rate = 1`)

このオプションでは、噴煙の形成時間は考慮されず、噴火発生時にただちに最高高度まで噴煙が達したとする。すなわち、高度 z から放出されるトレーサーの放出時刻 $t(z)$ は

$$t(z) = \Gamma T_M \tag{3.25}$$

と計算される。ただし、 Γ は $0 \sim 1$ の一様乱数とする。

¹⁵ 高度 10 km で半径 2 km 程度の広がり。

¹⁶ 例えば、Macedonio *et al.* (1988); Pfeiffer *et al.* (2005); Costa *et al.* (2009); Bonasia *et al.* (2010, 2011, 2012)。

(2) 高度に依存した放出時刻 (`n_switch_emission_rate = 2`)

このオプションでは、新堀・他 (2010) に従って、噴煙の形成時間 $t_s(z)$ を高度 z の関数として次のように表す。

$$t_s(z) = \left(\frac{5K_\Gamma^2}{72C_K} z^2 \right)^{2/5} \quad (3.26)$$

噴火継続時間を T_M とすると、この噴煙の形成時間 $t_s(z)$ を用いて、高度 z から離脱する粒子は、 $t_s(z) \sim t_s(z) + T_M$ の間に噴煙柱から放出する。ただし、渦拡散係数（噴煙柱内部の水平方向の乱流拡散係数） $C_K = 0.04 \text{ m}^2/\text{s}^{5/2}$ とする。実装では、 Γ を 0~1 の一様乱数とすると高度 z から放出されるトレーサーの放出時刻 $t(z)$ は

$$t(z) = t_s(z) + \Gamma T_M \quad (3.27)$$

で計算する。

3.2 初期値の出力例：火砕物の供給源モデル

本節では、初期値の出力の例として第 3.1 節で紹介した火砕物の供給源モデルの出力結果を示す。ここで示すのは、Table 3.2 および Table 3.3 に示した設定である。なお、例として示した図に利用したスイッチの設定は降灰予報のデフォルトの設定である。前節までで説明したように実装では各所に乱数を用いているので、モデルの出力は滑らかではないことに注意する (Figures 3.2, 3.4 など)。

Table 3.2 Switch for ESP model (see Table D.7 of `namelist.txt`)

Switch name in <code>namelist.txt</code>	Value	Remarks	Sections	Figures
<code>n_switch_calc_mass</code>	1	Power law	3.1.1 (1)	3.1
<code>n_switch_size_distribution</code>	0	Median	3.1.2 (1)	3.2
	1	Uniform	3.1.2 (2)	
	2	Log-normal	3.1.2 (3)	
<code>n_switch_particle_density</code>	1	Uniform	3.1.3 (1)	3.3
	2	Specific	3.1.3 (2)	
<code>n_switch_shape_vertical</code>	1	Uniform	3.1.4 (1)	3.4
	2	Suzuki (1983)	3.1.4 (2)	
<code>n_switch_shape_horizontal</code>	1	Line source	3.1.5 (1)	3.5
	2	Inverted cone	3.1.5 (2)	
<code>n_switch_emission_rate</code>	1	Uniform	3.1.6 (1)	3.6
	2	Diffusion time	3.1.6 (2)	

Table 3.3 Settings for ESP model

Latitude of vent [°]	32.0
Longitude of vent [°]	131.0
Altitude of vent [m asl]	0.0
Duration [s]	600.0
Date [UTC]	00:00 on 01 April 2020
Top height [m]	10000.0
Number of tracer	10000
D_{\min} [μm]/ D_{\max} [mm]	0.65/96.0
Median [mm]	0.25
SD	1.0
β	0.017
Ambient pressure around the vent [hPa]	1013.0
Ambient temperature around the vent [K]	300.0
Ambient air density around the vent [kg/m^3]	1.293

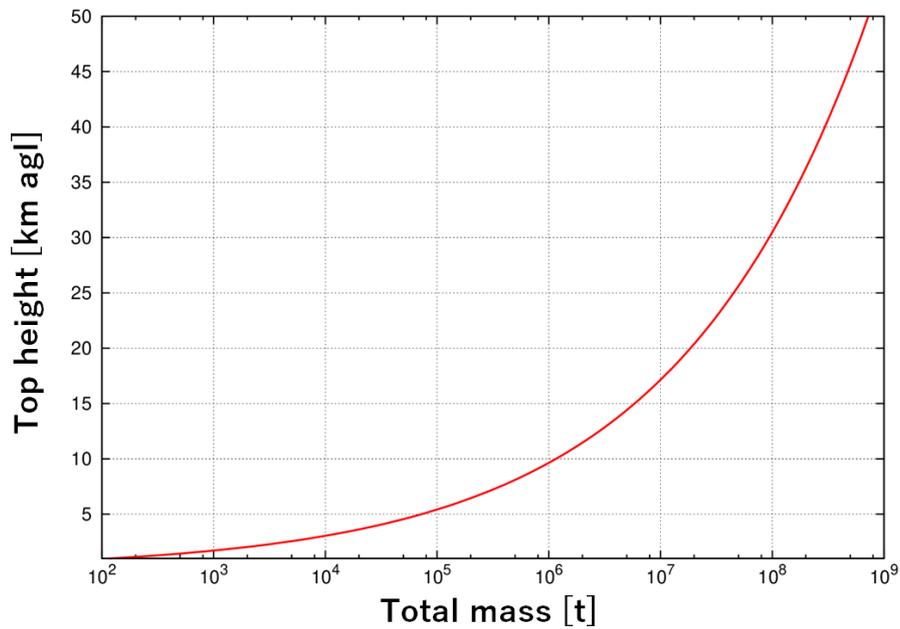


Figure 3.1 Power law for total eruption mass

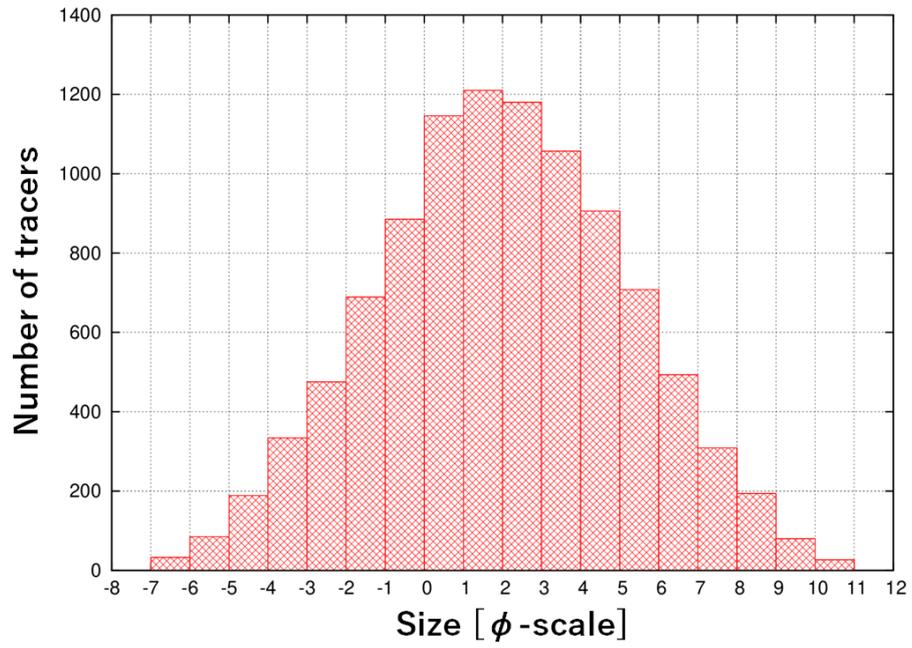


Figure 3.2 Size distribution

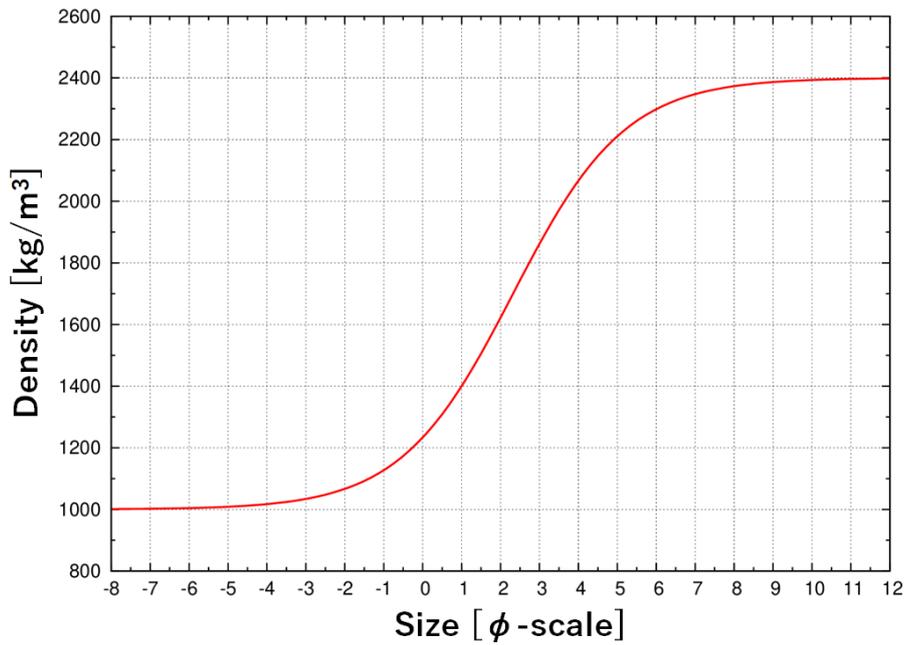


Figure 3.3 Relationship between density and size of tracers

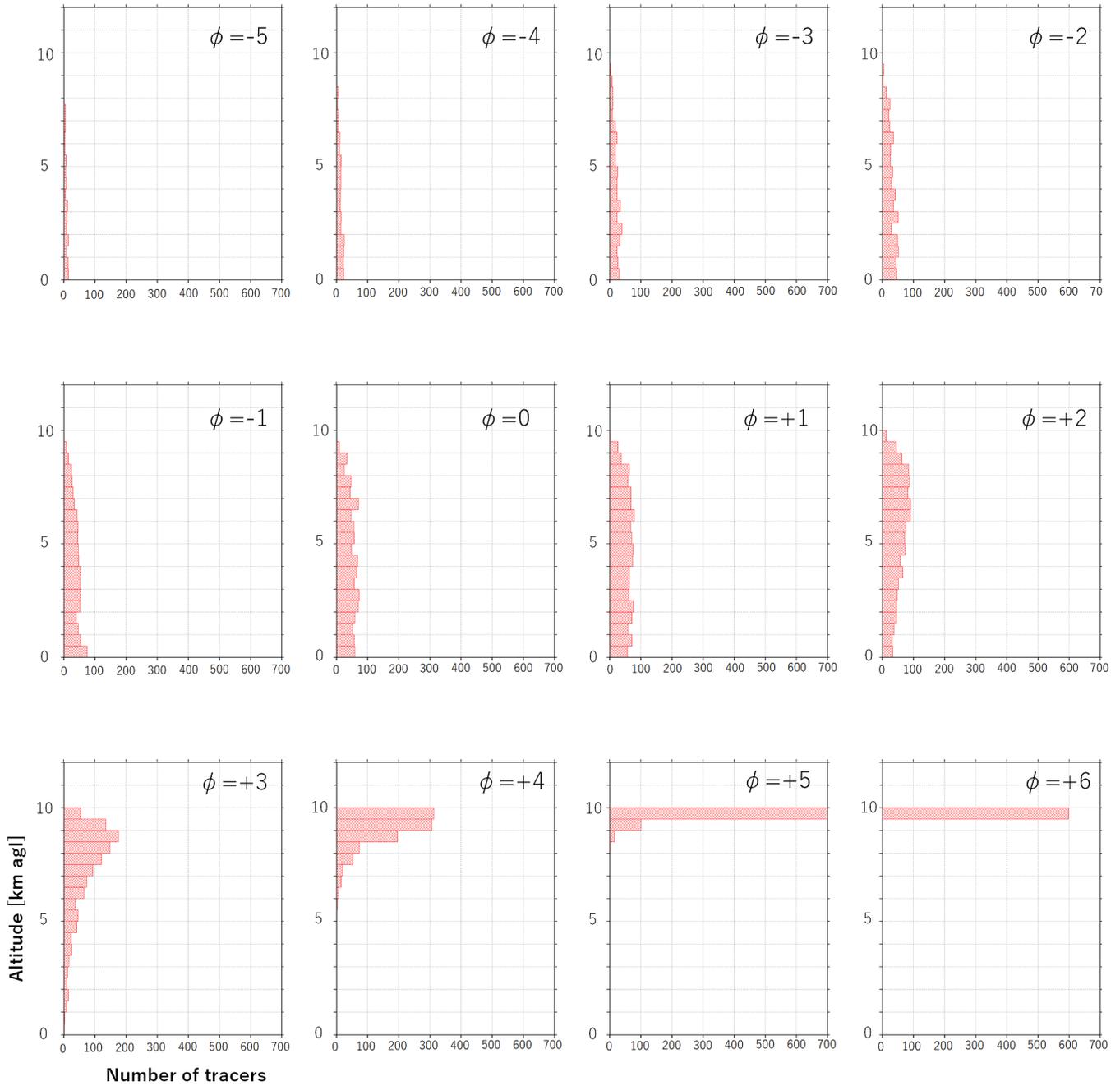


Figure 3.4 Vertical distribution of tracers

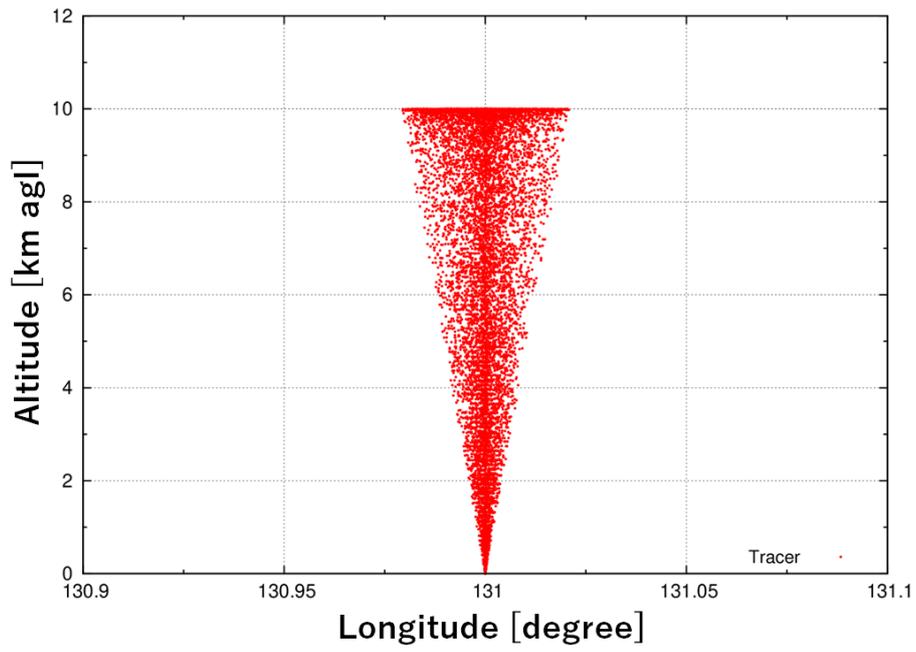


Figure 3.5 Shape of eruption plume

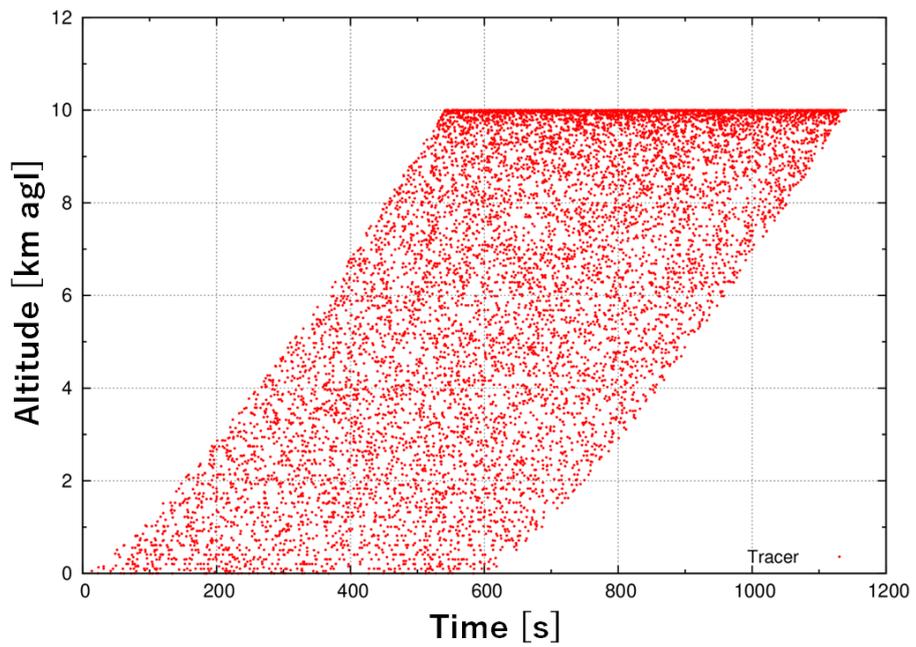


Figure 3.6 Time of emission