

1.3.3 深さに比して相対的に大きな半径を有する球状圧力源による地表面変位—有限要素法による計算—

深さに比して相対的に大きな半径を有する球圧力源による地表面変位

—有限要素法による計算—

坂井孝行（気象研究所地震火山研究部）・山本哲也*（気象庁）
福井敬一（気象研究所地震火山研究部）・藤原健治（気象庁）
高木朗充（気象研究所地震火山研究部）・中禮正明*（新潟地方気象台）
* 現所属：地磁気観測所

Surface Displacement by Spherical Pressure Sources of relatively Large Radius compared with Those Depth

- Calculation by Finite Element Method -

by

Takayuki Sakai¹, Tetsuya Yamamoto^{2*}, Keiichi Fukui¹, Kenji Fujiwara²,
Akimichi Takagi¹ and Masaaki Churei^{3*}

1. *Seismology and Volcanology Research Department, Meteorological Research Institute, Tsukuba, Japan*

2. *Japan Meteorological Agency, Tokyo, Japan*

3. *Niigata Local Meteorological Observatory, Niigata, Japan*

* *Present affiliation: Magnetic Observatory, Ishioka, Japan*

(Received June 16, 2006; Accepted February 20, 2007; Published July 10, 2007)

Abstract

Mogi-Yamakawa's model (or Mogi's model) has often been used to explain crustal deformation observed around volcanoes. This model is based on an analytical solution derived by Yamakawa (1955), which only holds good under the restricted condition that a small enough spherical pressure source exists at some depth within a semi-infinite homogeneous elastic body. However, there have been hardly any quantitative investigations of the application limit of this solution when a/D (a : radius of the sphere, D : depth of the sphere) increases. McTigue (1987) modified Yamakawa's solution so as to hold good even for large a/D . However, there have been no quantitative investigations of the application limit when a/D increases for this solution either. Therefore, we created large a/D numerical models using the finite element method (FEM) and found numerical solutions of surface deformation. Comparison with FE analyses clarified the limits of application of these two analytical solutions. For example, the values of a/D that agree with FE analyses within 1% are 0.22 for Yamakawa's solution and 0.45 for McTigue's solution. These two analytical solutions may hold precisely with smaller a/D values. However, the discrepancy between these two solutions and FE analysis gradually increases when a/D exceeds these values. In contrast, if D and a are determined by applying Yamakawa's solution to results of FE analyses, D is found to be determined much shallower than the true value, while a is determined with relative precision. Therefore, ΔV (volume change of the spherical pressure source) may also be estimated with relative precision.

Corresponding author: Takayuki Sakai
Meteorological Research Institute,
1-1 Nagamine, Tsukuba, Ibaraki 305-0052, Japan.
E-mail: tsakai@mri-jma.go.jp

1. はじめに

火山における地殻変動を解釈するモデルとして、従来、いわゆる「茂木-山川モデル」(または、単に「茂木モデル」)が多く用いられてきた。このモデルは、山川(1955)が導出した、地下の球圧力源による地表面変位の解析解(以下「山川の解」)を、茂木(1957)が桜島の大正噴火(1914年)前後の始良カルデラ周辺の地殻変動に適用したことからそう呼ばれている。

山川の解は、深さに対して充分小さな球圧力源が半無限均質弾性体内に存在するという、非常に限定された条件下においてのみ精度良く成立する(山川, 1955)。一方、現実の火山においては、地表面上に突出する火山地形が存在するため、山川の解の前提条件はそもそも完全には成り立たないほか、ある大きさを有する球圧力源が非常に浅い場所に存在するような場合も想定されうる。しかしながら、球圧力源の半径 a と中心深さ D との比がどの程度の場合まで山川の解が精度良く成立するかについては、山川(1955)が「 a/D がおよそ 0.1 以下ならばこの解は充分に良い近似を与える」と記しているものの、 a/D が 0.1 より大きくなった場合の解の精度についてはその後も定量的な検証がほとんど行われないうまま、山川の解が実際の観測データに広く適用され、火山直下の圧力源の深さや体積変化量等の推定が行われているのが現状である。

一方、McTigue (1987) は、 a/D が大きい場合にも精度良く成立するよう、山川の解に高次項を付け加えた解析解(以下「McTigue の解」)を提案した。しかしながら、この McTigue の解についても、山川の解と同様に、 a/D がどの程度の大きさまで適用できるかについての定量的な検証はこれまで行われていない。

そこで、本研究では、有限要素法(finite element method, 以下「FEM」)を用いて、球圧力源半径が中心深さに比して大きい場合について三次元の有限要素モデル(finite element model, 以下「FE モデル」)を作成し、有限要素解析(finite element analysis, 以下「FE 解析」)を行って地表面変位の数値解を求める。その結果を山川の解や McTigue の解と比較することにより、こ

れら 2 つの解析解の適用限界を定量的に評価すると同時に、球圧力源半径が深さに比して大きい場合の地表面変位の特徴を明らかにする。

2. 山川の解と McTigue の解

2.1 山川の解

山川(1955)によると、剛性率 μ の半無限均質弾性体内に球核(中心深さ D , 半径 a)が存在し、その表面に ΔP の圧力変化が加わった場合(Fig.1)、球圧力源直上からの水平距離が r の地点にある地表面上の点の上下変位 U_z および radial 方向の水平変位 U_r は次の解析解で表される。ただし、ラメの定数 λ は μ に等しいとする(従ってポアソン比 $\sigma=1/4$)。また、山川の解による U_z および U_r であることを明確にするため、以下それぞれ $U_{z(YMK)}$, $U_{r(YMK)}$ と表記する。

$$U_{z(YMK)} = \frac{3a^3 \Delta P}{4\mu} \frac{D}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \quad \dots(1)$$

$$U_{r(YMK)} = \frac{3a^3 \Delta P}{4\mu} \frac{r}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \quad \dots(2)$$

なお、 z 軸については、原論文では鉛直下向きを正としているが、ここでは鉛直上向きを正として(1)式の符号を変え、 $U_{z(YMK)} > 0$ の場合に地表面の隆起を表すこととする。

この解は $a/D \ll 1$ の場合に、より具体的には $a/D \leq 0.1$ の場合に、充分に良い近似を与えるが、 a/D がそれより大きくなっていくと、解の導出の際に仮定する鏡像の影響によって解の精度は低下していく(山川, 1955)。

(1)(2)式より、

$$\frac{U_{z(YMK)}}{U_{r(YMK)}} = \frac{D}{r} \quad \dots(3)$$

という関係が成り立つことから、地表面上の任意の地点は、Fig.1 に見られるように、球圧力源中心とその地点とを結ぶ直線の延長線上に変位する。また、 $r=D$ において $U_{z(YMK)}$ と $U_{r(YMK)}$ は等しくなる。 $r < D$ では $U_{z(YMK)} > U_{r(YMK)}$, $r > D$ では $U_{z(YMK)} < U_{r(YMK)}$ となるため、 $r=D$ は $U_{z(YMK)}$ と $U_{r(YMK)}$ の大小関係が入れ替わる点となる。つまり、 $U_{z(YMK)}$ と $U_{r(YMK)}$ は $r=D$ で交点を持つ。

次に、 $\Delta P > 0$ (隆起) の場合の $U_{z(YMK)}$ と $U_{r(YMK)}$ の最大値(それぞれ $U_{zMAX(YMK)}$, $U_{rMAX(YMK)}$ とする)について見る。 $U_{z(YMK)}$ は r に関する単調減少関数であり、 $r=0$ (球圧力源直上)において、最大値

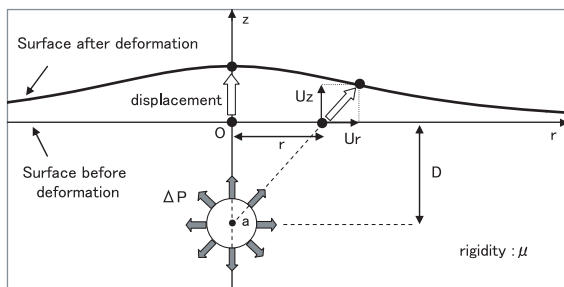


Fig. 1 Schematic illustration of Mogi-Yamakawa's model (or Mogi's model). U_z and U_r indicate vertical and horizontal displacements of the surface, respectively. D and a indicate depth and radius of the spherical pressure source, respectively. r is the distance between a surface point and a point just above the center of the pressure source. ΔP indicates pressure change at the pressure source.

$$U_{zMAX(YMK)} = \frac{3a^3\Delta P}{4\mu} \frac{1}{D^2} \quad \dots(4)$$

を取る。一方、 $U_{r(YMK)}$ が最大値を取る地点 $r_{MAX(YMK)}$ は、(2)式を r で偏微分することにより、

$$r_{MAX(YMK)} = \frac{D}{\sqrt{2}} \cong 0.7071D \quad \dots(5)$$

と導かれ、そこでの最大値 $U_{rMAX(YMK)}$ は

$$U_{rMAX(YMK)} = \frac{3a^3\Delta P}{4\mu} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(3/2)^{3/2}} \frac{1}{D^2} \quad \dots(6)$$

となる。

U_{zMAX} と U_{rMAX} との比を以下 ϕ とし、山川の解のそれを $\phi_{(YMK)}$ とすると、

$$\begin{aligned} \phi_{(YMK)} &= U_{zMAX(YMK)} / U_{rMAX(YMK)} \\ &= \sqrt{2} \cdot (3/2)^{3/2} \cong 2.5981 \quad \dots(7) \end{aligned}$$

となる。

一方、この場合の球圧力源半径の変化量 Δa は

$$\Delta a = \frac{a\Delta P}{4\mu} \quad \dots(8)$$

となる (萩原, 1977)。従って、球圧力源の体積変化量 ΔV は

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{4}{3} \pi (a + \Delta a)^3 - \frac{4}{3} \pi a^3 \cong 4\pi a^2 \Delta a \\ &= \frac{\pi a^3 \Delta P}{\mu} \quad \dots(9) \end{aligned}$$

と表される。

2.2 McTigue の解

McTigue (1987) は、山川の解に a/D の高次項を付け加えることにより、 a/D が大きい場合にも適用できる解析解の導出を試みている。この McTigue の解の上下変位 U_z および水平変位 U_r は次の解析解で表される。なお、McTigue の解による U_z および U_r であることを明確にするため、それぞれ $U_{z(McT)}$, $U_{r(McT)}$ と表記する。

$$\begin{aligned} U_{z(McT)} &= \varepsilon^3 (1 - \sigma) \frac{1}{(\rho^2 + 1)^{3/2}} \\ &\quad - \varepsilon^6 \left\{ \frac{(1 - \sigma)(1 + \sigma)}{2(7 - 5\sigma)} \frac{1}{(\rho^2 + 1)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{15(2 - \sigma)(1 - \sigma)}{4(7 - 5\sigma)} \frac{1}{(\rho^2 + 1)^{5/2}} \right\} \dots(10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{r(McT)} &= \varepsilon^3 (1 - \sigma) \frac{\rho}{(\rho^2 + 1)^{3/2}} \\ &\quad - \varepsilon^6 \left\{ \frac{(1 - \sigma)(1 + \sigma)}{2(7 - 5\sigma)} \frac{\rho}{(\rho^2 + 1)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{15(2 - \sigma)(1 - \sigma)}{4(7 - 5\sigma)} \frac{\rho}{(\rho^2 + 1)^{5/2}} \right\} \dots(11) \end{aligned}$$

ここで、 $\varepsilon = a/D$, $\rho = r/D$ であり、式全体は $\Delta P \cdot D/\mu$ で規格化されている。また、 z 軸は鉛直上向きが正である。

(10)(11)式に $\varepsilon = a/D$, $\rho = r/D$ を代入し、また、式全体に $\Delta P \cdot D/\mu$ を掛けて規格化を取り払い、さらに、山川の解に合わせて $\sigma = 1/4$ とすると、(10)(11)式は

$$\begin{aligned} U_{z(McT)} &= \frac{3a^3\Delta P}{4\mu} \frac{D}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{15a^6\Delta P}{184\mu} \frac{1}{D^2(D^2 + r^2)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{315a^6\Delta P}{368\mu} \frac{1}{(D^2 + r^2)^{5/2}} \quad \dots(12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{r(McT)} &= \frac{3a^3\Delta P}{4\mu} \frac{r}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{15a^6\Delta P}{184\mu} \frac{r}{D^3(D^2 + r^2)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{315a^6\Delta P}{368\mu} \frac{r}{D(D^2 + r^2)^{5/2}} \quad \dots(13) \end{aligned}$$

と表現される。 $U_{z(McT)}$, $U_{r(McT)}$ とも、第1項 ((10)(11)式の ε^3 項) は山川の解に一致している。

山川の解の場合と同様に、 $U_{z(McT)} / U_{r(McT)} = D/r$ であることから、地表面上の任意の地点は球圧力源中心とその地点とを結ぶ直線の延長線上に変位する。また、 $r = D$ において $U_{z(McT)}$ と $U_{r(McT)}$ が等しくなり、そこで大小関係が入れ替わる (つまり $U_{z(McT)}$ と $U_{r(McT)}$ は $r = D$ で交点を持つ) ことも山川の解と同様である。

(12)(13)式は次のように変形することも可能である。

$$U_{z(McT)} = \frac{3a^3 \Delta P}{4\mu} \frac{D}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \left\{ 1 - \frac{5a^3}{46} \frac{1}{D^3} + \frac{105a^3}{92} \frac{1}{D(D^2 + r^2)} \right\} \dots(14)$$

$$U_{r(McT)} = \frac{3a^3 \Delta P}{4\mu} \frac{r}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \left\{ 1 - \frac{5a^3}{46} \frac{1}{D^3} + \frac{105a^3}{92} \frac{1}{D(D^2 + r^2)} \right\} \dots(15)$$

従って、McTigue の解と山川の解との比は、 U_z 、 U_r とも

$$\begin{aligned} U_{z(McT)} / U_{z(YMK)} &= U_{r(McT)} / U_{r(YMK)} \\ &= 1 - \frac{5a^3}{46} \frac{1}{D^3} + \frac{105a^3}{92} \frac{1}{D(D^2 + r^2)} \dots(16) \end{aligned}$$

と表され、 a/D だけではなく r の関数でもある。 a を $0.1D$ から $0.9D$ まで、 $0.1D$ 刻みで変化させた場合の、 r の変化に伴う (16) 式の変化の様子を Fig.2 に示す。 a/D が大きいほど McTigue の解と山川の解との比が大きくなることは勿論だが、 r が小さいほど、即ち球圧力源の直上に近いほどその比が大きくなることが分かる。

次に、 $\Delta P > 0$ (隆起) の場合の $U_{z(McT)}$ と $U_{r(McT)}$ の最大値 (それぞれ $U_{zMAX(McT)}$ 、 $U_{rMAX(McT)}$ とする) について調べる。まず、 $U_{z(McT)}$ については、(14)式から r に関する単調減少関数であることが容易に確かめられ、 $U_{z(YMK)}$ と同様に $r=0$ (球圧力源直上) において最大値を取る。その最大値 $U_{zMAX(McT)}$ は、(12)式に $r=0$ を代入して

$$\begin{aligned} U_{zMAX(McT)} &= \frac{3a^3 \Delta P}{4\mu} \frac{1}{D^2} \\ &+ \frac{285a^6 \Delta P}{368\mu} \frac{1}{D^5} \dots(17) \end{aligned}$$

と表される。一方、 $U_{r(McT)}$ が最大値を取る地点 $r_{MAX(McT)}$ は、(13)式を r で偏微分することにより、

$$r_{MAX(McT)} = \left\{ \frac{138D^2 + 615\frac{a^3}{D} - \sqrt{(138D^2 + 615\frac{a^3}{D})^2 - (-552 + 60\frac{a^3}{D^3})(276D^4 + 285a^3D)}}{-552 + 60\frac{a^3}{D^3}} \right\}^{1/2} \dots(18)$$

と導かれる。このように、 $r_{MAX(McT)}$ は、 D のみの関数であった山川の解の $r_{MAX(YMK)}$ ((5)式参照) と異なり、 a の関数でもある。 a を $0.01D$ から $0.99D$ まで変化させた場合の、 a と $r_{MAX(McT)}$ との関係を Fig.3 に示す。 $r_{MAX(McT)}$ は、 a が小さい場合は $r_{MAX(YMK)}$ ((5)式より $0.7071D$) に一致するものの、 a が大きくなるに従って小さくなり、 $a/D=0.9$ の場合には $0.5977D$ まで小さくなる。つまり、 $U_{r(McT)}$ は、 a/D の増大につれて、より球圧力源直上に近い地点で最大値を取るようになる。

$U_{r(McT)}$ の最大値 $U_{rMAX(McT)}$ は、(18)式を(13)式に代入することによって求められる (式が長大になるため表記は省略)。これと(17)式とから、McTigue の解の U_{zMAX}

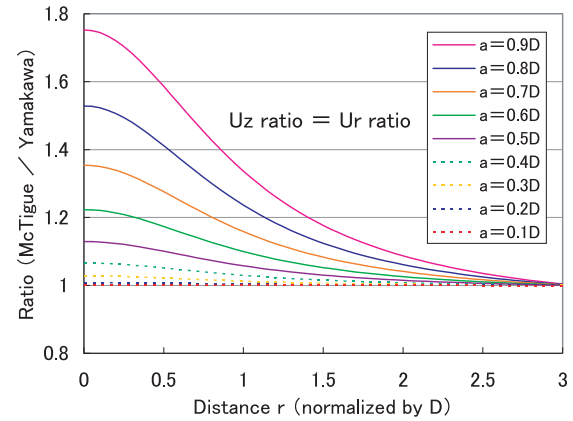


Fig. 2 Ratio of McTigue's solution to Yamakawa's solution. Radius a is varied from $0.1D$ to $0.9D$. The ratio on U_z of the two solutions and that on U_r are equivalent for each a .

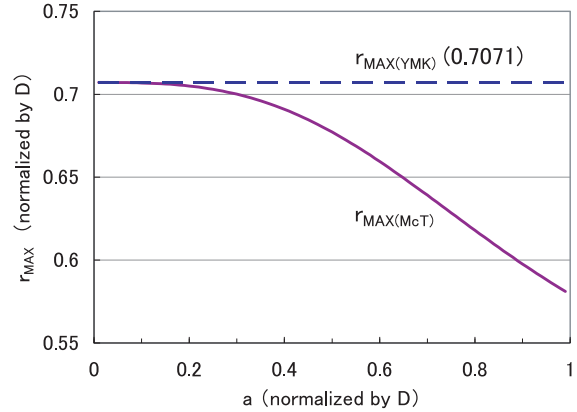


Fig. 3 Relationship between radius a and $r_{MAX(McT)}$ (the distance where U_r of McTigue's solution reaches its maximum). a is varied from $0.01D$ to $0.99D$. While a is small, $r_{MAX(McT)}$ is equal to $r_{MAX(YMK)}$ (the distance where U_r of Yamakawa's solution reaches its maximum, $0.7071D$).

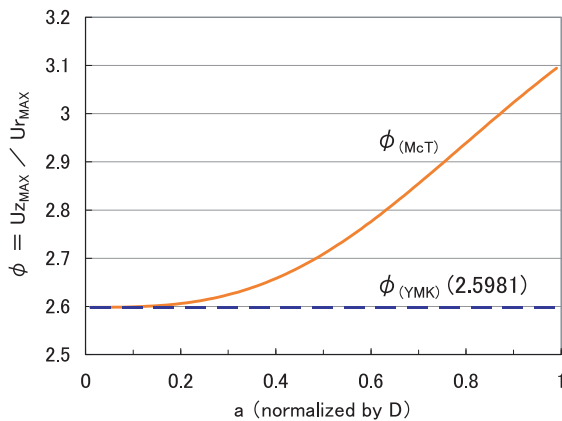


Fig. 4 Relationship between radius a and $\phi_{(McT)}$ (the ratio of U_{zMAX} to U_{rMAX} of McTigue's solution, where U_{zMAX} and U_{rMAX} indicate maximums of U_z and U_r , respectively). While a is small, $\phi_{(McT)}$ is equal to $\phi_{(YMK)}$ (the ratio of U_{zMAX} to U_{rMAX} of Yamakawa's solution, 2.5981). When a increases, $\phi_{(McT)}$ also increases gradually and finally exceeds 3.

と U_{rMAX} との比、 $\phi_{(McT)} = U_{zMAX(McT)} / U_{rMAX(McT)}$ が求められる。 $\phi_{(YMK)}$ (山川の解の ϕ) は定数 (2.5981) であったのに対し、 $\phi_{(McT)}$ は a の関数となる。 $\phi_{(McT)}$ の a による変化の様子を Fig.4 に示す。 a が小さい場合、 $\phi_{(McT)}$ は $\phi_{(YMK)}$ (=2.5981) に一致するが、 a が大きくなるにつれて $\phi_{(McT)}$ の値は大きくなり、 a/D が 0.88 以上では 3 を超えるようになる。

3. FEM および今回作成した FE モデルの概要

3.1 FEM の概要と使用ソフトウェア

FEM とは、物体の形状が複雑な場合など解析的に扱うことが困難である場合に、その物体を仮想的に多数の有限の大きさの要素 (element) に分割 (meshing, 以下「メッシング」) して数値解を求める手法である。その際、要素内部の変位は形状関数 (shape function) と呼ばれる関数によって補間され、それぞれの要素についての要素マトリックスを作成した後に、物体全体についての境界条件を組み込みつつ全ての要素マトリックスを統合した全体マトリックスを作成し、それを解いて数値解が求められる。二次元 FE モデルの場合は三角形要素や四角形要素が、また三次元 FE モデルの場合は主として四面体要素や六面体要素がそれぞれ用いられ、それらの多角形や多面体の頂点は節点 (node) と呼ばれる。

今回の三次元 FE モデルの作成および FE 解析には、ANSYS, Inc. の FEM 汎用ソフトウェアである ANSYS Ver.7.0 を用いた。三次元 FE モデルにおいて球面などの曲面を扱う際は四面体要素が通常用いられる。今回はより高い計算精度が得られるよう、形状関数が座標の二次関数で表される四面体要素 (Fig.5) を用いた。この場合、Fig.5 に見られるように、節点間に 6 個の中間節点 (midside node) が配置され、要素内のある点の例えば x 方向の変位 u は次式で補間される (例えば、小柴, 1990)。

$$\begin{aligned} u = & u_I(2L_1 - 1)L_1 + u_J(2L_2 - 1)L_2 \\ & + u_K(2L_3 - 1)L_3 + u_L(2L_4 - 1)L_4 \\ & + 4u_M L_1 L_2 + 4u_N L_2 L_3 + 4u_O L_1 L_3 \\ & + 4u_P L_1 L_4 + 4u_Q L_2 L_4 + 4u_R L_3 L_4 \cdots (19) \end{aligned}$$

ここで、 $u_I \sim u_R$ はそれぞれ節点 $I \sim L$ および中間節点 $M \sim R$ における x 方向の変位であり、 $L_1 \sim L_4$ は要素の体積によって規格化された体積座標変数と呼ばれる座標変数である。 y 方向および z 方向の変位についても同様にして補間が行われる。

3.2 今回作成した FE モデルの概要

FEM は主に工学分野で用いられる計算手法であり、そこでは通常、機械製品や建造物などの解析対象全体をモデリングして解析が行なわれる。一方、FEM を用いて火山周辺の局所的な地殻変動を計算する場合には、固体地球全体をモデリングする必要はないと考えられ、固体地球の一部分のみを切り取ってモデリングするのが現実的である。その場合、モデル領域の大きさや境界条件の設定が重要となることが予想されるが、坂井・他 (2007) は、圧力源の深さに対してモデル領域を水平方向にも深さ方向にも充分大きく設定すれば、モデル領域が限定されていることの影響をほとんど受けずに高い計算精度が得られることを示した。そこで、以下、坂井・他 (2007) に従って FE モデルを設定する。

固体地球表面の曲率は無視し、地表面を平面とする。球圧力源の半径 a を 1km に固定し、 a/D が 0.1, 0.2, ..., 0.9 となるよう、中心深さ D を 10km から次第に浅くしていく (Table1 参照)。この球圧力源の周囲に円柱形のモデル領域を設定する。その場合、円柱モデル領域の半径 R および高さ H を大きくするほどモデル領域中心部での計算精度は高くなっていくが、反面、メッシングが次第に困難になると共に節点数が増大し、計算時

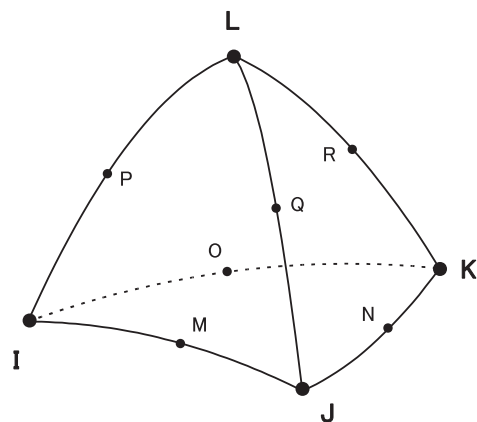


Fig. 5 Three-dimensional, 10-Node tetrahedral element used in this finite element analysis (FEA). I, J, K and L are nodes. M, N, O, P, Q and R are midside nodes. The shape function of this element is represented by a quadratic function.

間も加速度的に増大していく。今回の解析では、全 9 モデルについてメッシングを行うことができたモデル領域の中で最も大きな $R=H=700\text{km}$ の円柱モデル領域を設定することにした。 $a/D=0.1$ ($a=1\text{km}$, $D=10\text{km}$)

Table 1 D and a/D of each FE model analyzed in this study. Radius a is fixed at 1km in every FE model.

D [km]	a/D
10	0.1
5	0.2
3.33333	0.3
2.5	0.4
2	0.5
1.66667	0.6
1.42857	0.7
1.25	0.8
1.11111	0.9

($a=1\text{km}$)

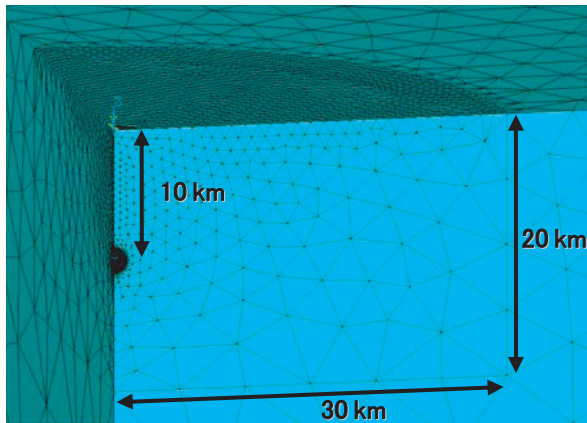


Fig. 6-1 Central part of “ $a/D=0.1$ model”, an FE model where radius a and depth D of the spherical pressure source are 1km and 10km, respectively. Both radius (R) and height (H) of the columnar FE model region are set to 700km in order to increase the precision of calculation.

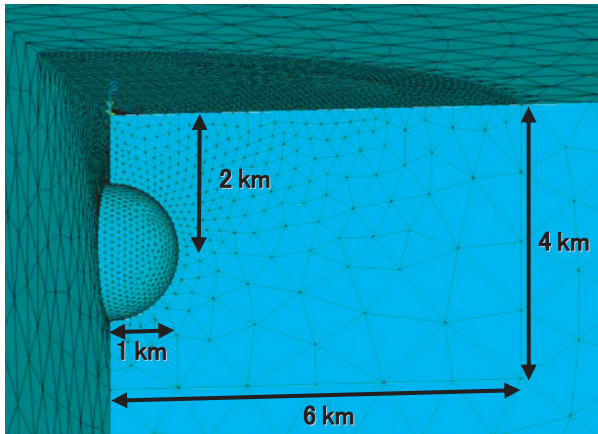


Fig. 6-2 Central part of “ $a/D=0.5$ model”, an FE model where radius a and depth D of the spherical pressure source are 1km and 2km, respectively. Both R and H of the columnar FE model region are also set to 700km.

の場合のモデル中心部の拡大図を Fig.6-1 に、また、 $a/D=0.5$ ($a=1\text{km}$, $D=2\text{km}$) の場合のモデル中心部の拡大図を Fig.6-2 に示す。これらの円柱モデル領域は方位角方向に 90 度に切断してあるが、今回扱うような軸対称モデルの場合はこの 2 つの切断面に対称境界条件を設定して FE 解析を行うことにより、要素数および節点数を 360 度円柱モデルの場合の約 1/4 に減らしつつ、360 度円柱モデルと全く同じ解析結果を得ることができる。円柱モデル領域の底面および外周面の境界条件は完全固定（上下方向、水平方向の変位をいずれもゼロに拘束）とした。

メッシングの設定は、球圧力源部分のメッシュサイズを a ($=1\text{km}$) の 1/10 の 100m 程度とし、また、地表面については、それぞれのモデルの D の 3 倍までの距離について、 D の 1/10 の設定で細かくメッシングした。モデルの媒質は均質かつ $\lambda=\mu$ （従ってポアソン比 $\sigma=0.25$ ）とし、剛性率 μ の値として、上部地殻の標準的な値 40GPa を用いた。この時、ヤング率は 100GPa となる。球圧力源の表面に加わる圧力変化 ΔP は正（外向き）とし、その大きさは、 $a/D=0.1$ モデルについては 1000atm ($=0.101325\text{GPa}$) とした。 a/D の大きなモデルについては、 ΔP として 1000atm を与えると変位が非現実的に大きな値になることもあるため、その大きさを適宜調整した。

なお、 $a/D=0.1\sim0.9$ の FE モデルを作成する際、例えば、 $R=H=700\text{km}$ かつ $D=10\text{km}$ とし、 a を 1km から 9km まで大きくしていくといった方法も考えられるが、モデル領域の大きさに比べて a を大きくした場合には球圧力源とモデル端との相互作用が強くなる可能性も考えられ、それが計算精度にどのような影響を及ぼすか不明であるため、今回は上記のように a を 1km に固定して D を 10km から次第に浅くしていくという方法でモデルを作成した。

以下では、FE 解析結果による上下変位 U_z および水平変位 U_r をそれぞれ $U_{z(FEM)}$, $U_{r(FEM)}$ と表記する。

3.3 計算精度の確認

上記の円柱モデル領域 ($R=H=700\text{km}$) による計算精度を確認するため、 $a/D=0.1$ ($=1\text{km}/10\text{km}$) の場合の $U_{z(FEM)}$ と $U_{r(FEM)}$ を、山川の解 ($U_{z(YMK)}$, $U_{r(YMK)}$) と併せて Fig.7-1 に示す。なお、横軸の距離 r は D の 3 倍の 30km までを表示し、 $U_{z(FEM)}$ と $U_{r(FEM)}$ は中間節点を含めて 500m 間隔で示した。また、両者の比 ($U_{z(FEM)}/U_{z(YMK)}$, $U_{r(FEM)}/U_{r(YMK)}$) を Fig.7-2 に示す。

今、 $a/D=0.1$ と、球圧力源半径は深さに比して充分小さく、この場合は先述のように山川の解が充分精度良く成り立っているため、Fig.7-2 に示した比は即ち FEM の計算精度（FEM による山川の解の再現精度）を表すことになる。 U_z , U_r の計算精度とも、球圧力源直上 ($r=0\text{km}$) およびその近傍では 1 より僅かに大きく、 r が大きくなるに従って徐々に 1 より小さくなっていくが、 U_r については $r=30\text{km}$ までの全範囲において 1.0028 $\sim$ 0.9967 の高い計算精度を実現しており、また、 U_z についても 1.0019 $\sim$ 0.9899 と、最大誤差約 1% の高

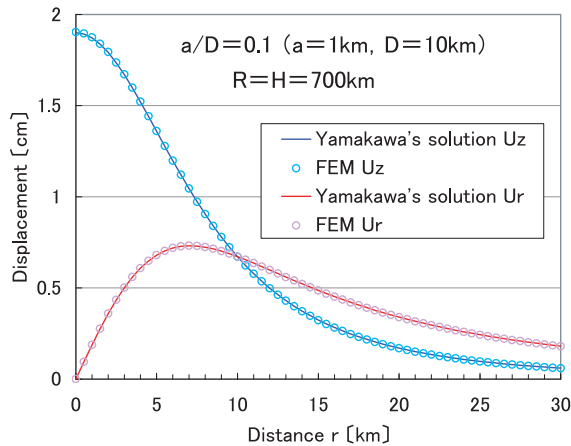


Fig. 7-1 Comparison of results of FEA of “ $a/D=0.1$ model” ($a=1\text{km}$ and $D=10\text{km}$) and Yamakawa's solution. The horizontal axis (distance r) is shown as far as 30km. The results of FEA are plotted at intervals of 500m, including midside nodes, and are in agreement with Yamakawa's solution throughout the graph.

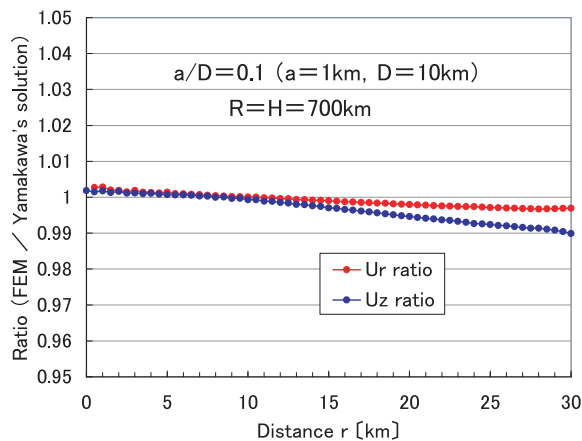


Fig. 7-2 Ratio of results of FEA of “ $a/D=0.1$ model” to Yamakawa's solution. “ U_z ratio” means the ratio of $U_{z(FEM)}$ (U_z of FE models) to $U_{z(YMK)}$ (U_z of Yamakawa's solution), and “ U_r ratio” means that of U_r . These ratios hold near 1 throughout the graph, which indicates high precision of calculation.

い計算精度が確保されている。 r の増加に伴う計算精度の低下はモデル端の影響と考えられる(坂井・他, 2007)。一方、モデル端の影響をほとんど受けず非常に高精度のFE解析結果が得られる球圧力源直上($r=0\text{km}$)およびその近傍において、比の値が1より僅かに(0.2%程度)大きくなっているのは、 a/D を0.1と充分小さくしても球圧力源半径の大きさの影響が僅かながら存在し、山川の解が厳密には成立していないためと考えられる。

今回のFE解析では、全てのモデルで $a=1\text{km}$ かつ $R=H=700\text{km}$ と設定していることから、全モデルについてFig.7-2と同程度の計算精度が成り立っていると考えられる。

なお、 r が10km以上になると U_z の計算精度は U_r に比べて明らかに大きく低下するが、この理由については現在のところ不明である(坂井・他, 2007)。

4. FE 解析結果と2つの解析解との比較

前節のようにして作成した $a/D=0.1\sim 0.9$ の各モデルのFE解析結果を、山川の解およびMcTigueの解と比較する。

ところで、FEモデルでは、各部の比率を保ちつつモデル全体の大きさを変えた場合には相似則が成り立つことから、FE解析を行ったある具体的なモデルの諸量があるパラメータで規格化して一般化することが可能である(坂井・他, 2007)。そこで以下では、 r および a について、各モデルの具体的な数値ではなく D で規格化した値で示すことにより、一般性を持たせた議論とする。

4.1 FE 解析結果の概要

今回計算した9例のFEモデル($a/D=0.1\sim 0.9$)のうち4例のモデル($a/D=0.3, 0.5, 0.7, 0.9$)について、 $U_{z(FEM)}$ と $U_{r(FEM)}$ をFig.8-1(a)~8-4(a)に示す(距離 $r=3D$ まで、中間節点を含めて0.05D間隔)。図中には山川の解およびMcTigueの解も併せて示した。なお、縦軸はそれぞれのグラフについて(4)式の $U_{zMAX(YMK)}$ で規格化して示した。

また、山川の解およびMcTigueの解の U_z と U_r それぞれについて、FE解析結果との比を取ったグラフもFig.8-1(b)~8-4(b)に示した(ただし、 $r=0$ では3者いずれも $U_r=0$ となるため比は示していない)。それぞれの解析解について、 U_z の比と U_r の比はほぼ重なり合っている。

$a/D=0.1$ (Fig.7-1 参照)および0.2では3者の変位はほぼ一致するが、 $a/D=0.3$ (Fig.8-1)になると山川の解がそれ以外の2者と乖離し始める。これは、山川の解が要請する「深さに対して充分小さな球圧力源」という前提条件が、 $a/D=0.3$ で既に成り立たなくなっていることを示す。さらに、McTigueの解も $a/D=0.5$ (Fig.8-2)付近でFE解析結果と分離し始める。

しかしながら、このように a/D が大きくなった場合に3者の変位の違いが目立つのは球圧力源に近い地点のみであり、遠方では3者が比較的良く一致していることも注目される。2つの解析解の U_z 、 U_r とも、FE解析結果との比は $r=0$ において(ただし、 U_r については $r=0$ に最も近い $r=0.05D$ において)最も1から離れた値を取り、球圧力源から離れるにつれて徐々に1に近付いていく。従って、遠方においては、 a/D の大きさが地表面変位に与える影響は小さく、2つの解析解とも比較的良く成り立つと言える(しかしながら、実際の火山での地殻変動観測では、そのような遠方の変位量の小さいデータはさほど重要ではないことが多い)。

ところで、 $a/D=0.9$ の場合(Fig.8-4)、 $r=1.2D$ 以遠において、McTigueの解とFE解析結果との比が1より僅かに大きくなっている。 U_z については $r=1.65D$ で比が1.017と最大となり、また、 U_r については $r=1.75D$ で比の最大値1.025を取る。このような2%程度の差は、Fig.7-2に示したFEMの計算精度(U_z で約1%、 U_r で約0.3%)に比べて有意に大きいことから、McTigueの解

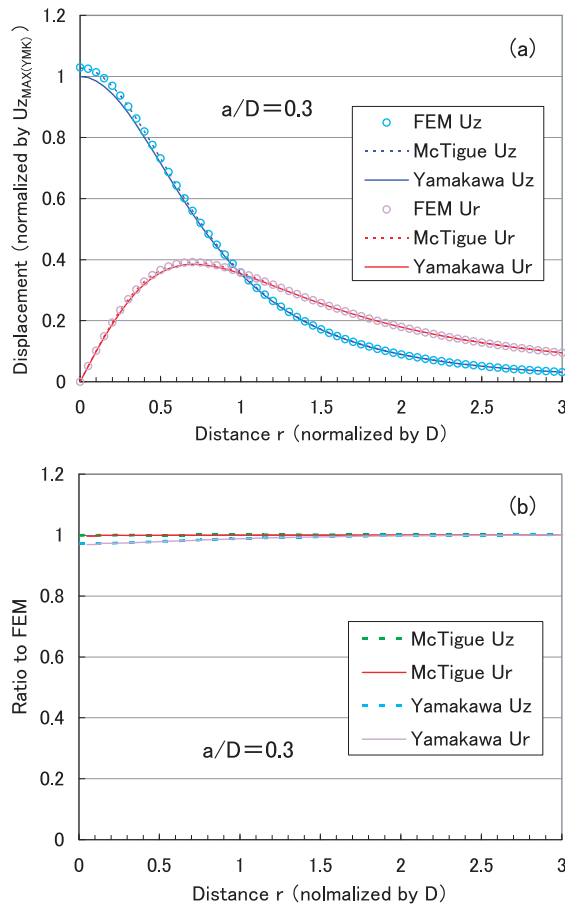


Fig. 8-1(a) Results of FEA of “ $a/D=0.3$ model”. Yamakawa’s solution and McTigue’s solution are also indicated. The horizontal axis is normalized by D , and the vertical axis by $U_{zMAX(YMK)}$ (U_{zMAX} of Yamakawa’s solution, equation (4)).
(b) Ratio of Yamakawa’s solution and McTigue’s solution to results of FEA of “ $a/D=0.3$ model”.

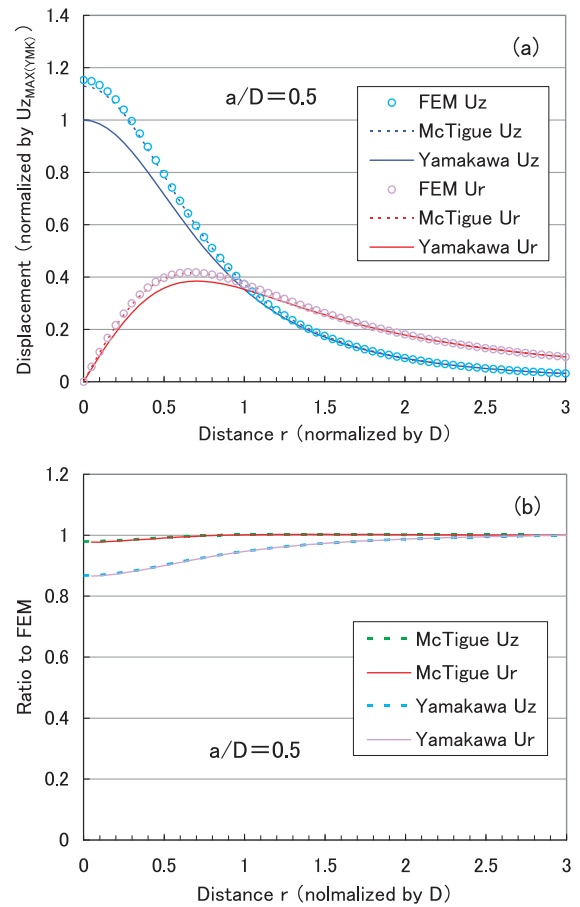


Fig. 8-2(a)(b) For $a/D=0.5$.

の性質に起因するものと考えられる。これと同様のことは $a/D=0.8$ および 0.7 (Fig.8-3) の場合にも見られる。

4.2 $U_{z(FEM)}$ と $U_{r(FEM)}$ の交点

先に第2節で見たように、山川の解および McTigue の解の U_z と U_r は $r=D$ において交点を持つが、同様の関係は FE 解析結果についても成立しているであろうか。

Fig.7-1 および Fig.8-1(a)~8-4(a) 上において、 $0.05D$ 間隔で離散的に与えられている $U_{z(FEM)}$ および $U_{r(FEM)}$ を曲線として捉えたと、両者の交点は $r=D$ 付近に存在する様子が見て取れる。

これを定量的に確かめるため、(19)式の形状関数を使用する ANSYS の補間ツールを利用して、各節点 (中間節点を含めて $0.05D$ 間隔) での $U_{z(FEM)}$ および $U_{r(FEM)}$ から $0.0001D$ 間隔で値を補間し、 $U_{z(FEM)}$ と $U_{r(FEM)}$ との差の絶対値が最も小さくなる地点を両者の交点と見なした。その結果、それらの地点の距離 r は各モデルの D と 0.1% 以内の高い精度で一致した。従って、 a/D の大きな球圧力源が現実には地下に存在する場合も、 U_z と U_r

は $r=D$ において交点を持つことになる (ただし、地表面が平面であり、かつ媒質が均質である場合)。あるいは、もし U_z と U_r の大きさが等しくなる地点があれば、その地点の球圧力源直上からの距離 r が D に等しくなる。

4.3 地表面上の点の変位ベクトルの方向

第2節で見たように、山川の解および McTigue の解では $U_z / U_r = D/r$ という関係が成り立ち、このことは、地表面上の任意の地点は球圧力源中心とその地点とを結ぶ延長線に変位することを意味する。一方、FE 解析結果についても同様の関係が成り立つならば、それは a/D の大きな球圧力源が現実には存在する場合にその中心深さを推定する上で非常に有用な性質と考えられる。そこで、各モデルの $U_{z(FEM)} / U_{r(FEM)}$ と D/r がどの程度一致しているかを定量的に調査する。

$a/D=0.5$ の場合の $U_{z(FEM)} / U_{r(FEM)}$ と D/r との比較を Fig.9 に示す。 $r=3D$ までの全範囲で、 $U_{z(FEM)} / U_{r(FEM)}$ は D/r と 0.3% 以内の高い精度で一致している。他の8モデルについても同様の結果が得られ、 $U_{z(FEM)} / U_{r(FEM)}$ は D/r と最大でも 1% 以内で一致した。この 1% の誤差は FEM の計算精度 (Fig.7-2 参照) の影響と考えられ、従って、 a/D の大きな球圧力源が現実には存在する場合にも、

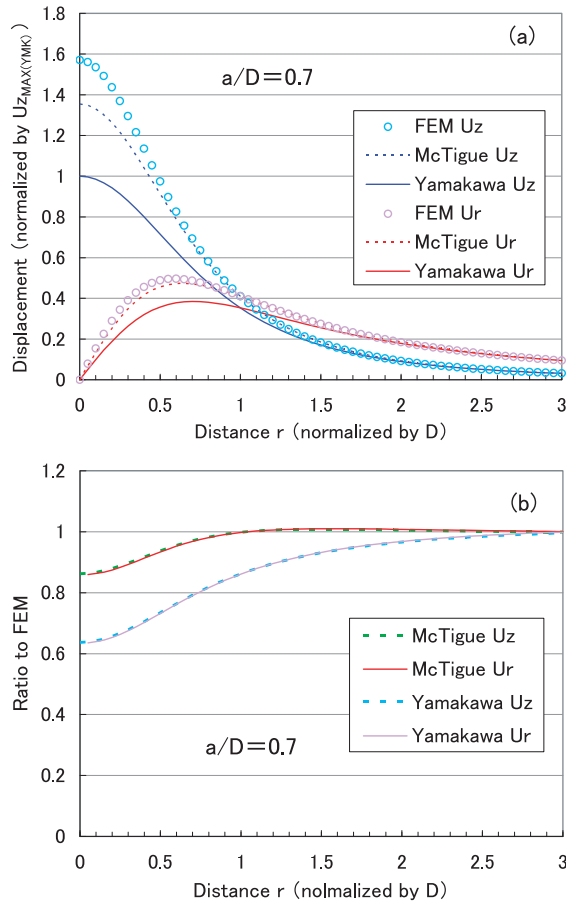


Fig. 8-3(a)(b) For $a/D=0.7$.

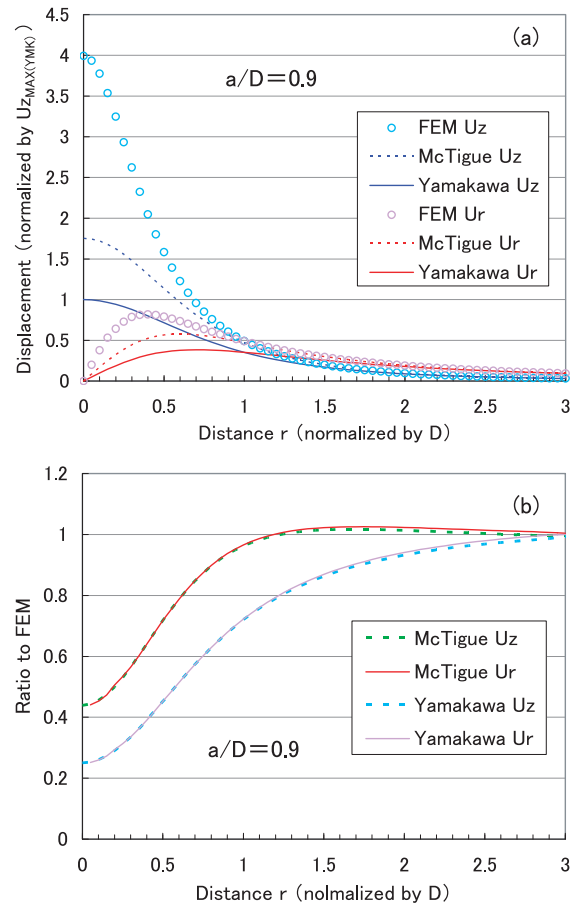


Fig. 8-4(a)(b) For $a/D=0.9$.

地表面上の任意の地点は球圧力源中心とその地点とを結ぶ延長線上に変位すると言える。

よって、地表面が平面であり、かつ媒質が均質である場合には、 a/D の大小にかかわらず、任意の地点の変位ベクトルの延長線上（地表面隆起の場合は逆向き）に球圧力源の中心が存在することになる。さらに、地表面上の2点において変位ベクトルが得られれば、それらの延長線が交わった点が球圧力源の中心となる。

なお、Fig.8-1(b)～8-4(b)において、それぞれの解析解について U_z の比と U_r の比がほぼ重なり合っていることも、FE モデルの各地点の変位ベクトルは2つの解析解の変位ベクトルをほぼ同じ方向に延伸したものであることを示している。また、それらの比が球圧力源直上 ($r=0$) において最も 1 から離れた値を取り、球圧力源から離れるにつれて徐々に 1 に近付いていくことは、変位ベクトルの延伸の度合いが球圧力源直上において最も大きく、距離が離れるにつれて徐々に小さくなっていくことを示す。これは、球圧力源直上は地下の球圧力源の表面から最も近い地表面上の点であり、 a/D が大きいことの影響をそこが最も受けやすいためと考えられる。

4.4 U_z および U_r の最大値の比較

次に、FE 解析結果と山川の解および McTigue の解と

の比較をより詳しく行うため、それぞれの U_z と U_r の最大値に注目する。

なお、FE 解析結果については、4.2 節と同様に、(19) 式の形状関数を使用する ANSYS の補間ツールを利用して、各節点(中間節点を含めて $0.05D$ 間隔)での $U_{z(FEM)}$ および $U_{r(FEM)}$ から $0.0001D$ 間隔で値を補間し、その中で最大となるものを最大値 $U_{z_MAX(FEM)}$ および $U_{r_MAX(FEM)}$

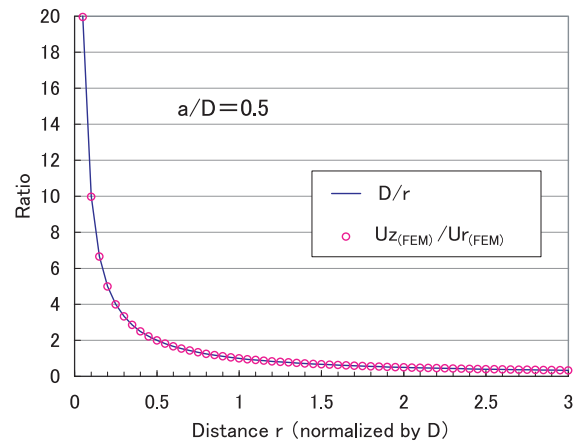


Fig. 9 Comparison of $U_{z(FEM)}/U_{r(FEM)}$ and D/r for $a/D=0.5$ ($U_{z(FEM)}$ and $U_{r(FEM)}$ mean U_z and U_r of FE model, respectively). $U_{z(FEM)}/U_{r(FEM)}$ agree with D/r within 0.3% throughout the graph.

とした。また、両者の比 ($U_{zMAX(FEM)} / U_{rMAX(FEM)}$) を $\phi_{(FEM)}$ とし、 $U_{rMAX(FEM)}$ が現れる地点を $r_{MAX(FEM)}$ とする。

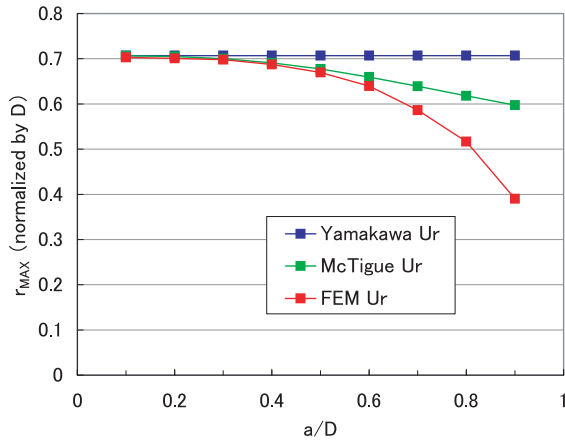


Fig. 10-1 Changes of r_{MAX} (the distance where U_r reaches its maximum) of Yamakawa's solution, McTigue's solution, and FE models with increasing a/D .

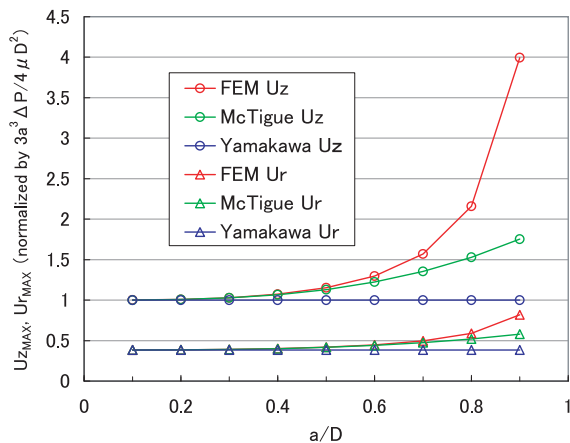


Fig. 10-2 Changes of U_{zMAX} and U_{rMAX} of Yamakawa's solution, McTigue's solution, and FE models with increasing a/D . The vertical axis is normalized by $U_{zMAX(YMK)}$ for each a/D .

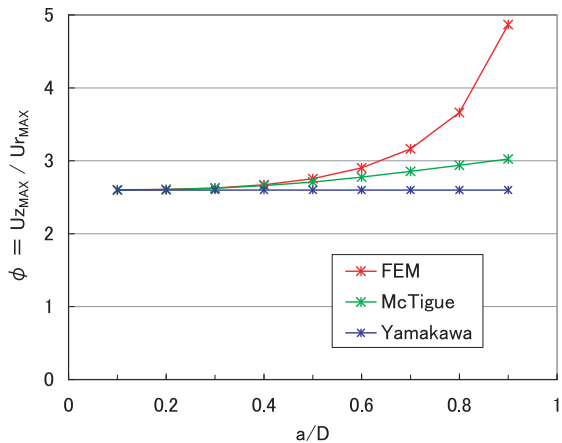


Fig. 10-3 Changes of ϕ (the ratio of U_{zMAX} to U_{rMAX}) of Yamakawa's solution, McTigue's solution and FE models with increasing a/D .

4.4.1 U_z および U_r が最大値を取る地点の比較

最初に、3者の U_z および U_r が最大値を取る地点について見る。

U_z については、 $U_{z(FEM)}$ は2つの解析解と同様、 $r=0$ (球圧力源直上) で最大値を取る。

一方、 U_r が最大値を取る地点 r_{MAX} は3者間で異なる。 a/D の増大に伴う3者の r_{MAX} の変化の様子を Fig.10-1 に示す。 $r_{MAX(YMK)}$ は a/D にかかわらず $0.7071D$ で一定である。一方、 $r_{MAX(FEM)}$ は、 $a/D=0.1$ および 0.2 の場合は $0.7071D$ に1%以内で一致するが、 a/D が 0.3 以上になると徐々に $0.7071D$ より小さくなっていく。つまり、 $U_{r(FEM)}$ は、より球圧力源直上に近い地点で最大値を取るようになる。 a/D がさらに大きくなると $r_{MAX(FEM)}$ は急速に減少していき、 $a/D=0.9$ の場合には $0.3903D$ まで小さくなる。これは $0.7071D$ の55%に相当する。一方、 $r_{MAX(McT)}$ は、 $a/D=0.4$ までは $r_{MAX(FEM)}$ に1%以内で一致するが、 a/D がそれより大きくなると $r_{MAX(FEM)}$ の急速な減少の様子を表すことができず、 $r_{MAX(FEM)}$ と $r_{MAX(YMK)}$ との間に位置する。例えば、 $a/D=0.9$ の場合には $r_{MAX(McT)}$ は $0.5977D$ であり、 $r_{MAX(YMK)}$ の85%、 $r_{MAX(FEM)}$ の153%に相当する。

4.4.2 U_z および U_r の最大値の比較

次に、3者の U_z および U_r の最大値について見る。

U_z の最大値 U_{zMAX} および U_r の最大値 U_{rMAX} を3者で比較した結果を Fig.10-2 に示す。なお、これらの値はいずれも(4)式の $U_{zMAX(YMK)}$ で規格化した値である。そのため、 $U_{zMAX(YMK)}$ の値は全て1となっている。また、 $U_{zMAX(McT)}$ についての値は、(17)式と(4)式とより、

$$U_{zMAX(McT)} / U_{zMAX(YMK)} = 1 + \frac{95}{92} \left(\frac{a}{D} \right)^3 \quad \dots (20)$$

と表すことができる。なお、 $U_{rMAX(McT)}$ についての値も同様に解析的に表すことができるが、式が長大になるため表記は省略する。

Fig.10-2 からは、 U_{zMAX} 、 U_{rMAX} とともに、 a/D が大きくなるほど3者の差が急速に開いていくことが分かる。つまり、山川の解や McTigue の解は、 a/D が大きくなった場合に実際には U_{zMAX} および U_{rMAX} が急速に大きくなっていく様子を表せないことが示されている。

a/D が大きくなるにつれての3者の差の開き方は U_{rMAX} よりも U_{zMAX} の方が顕著である。これは、Fig.8-1(b)~8-4(b)でも見たように、 U_z が最大値を取る球圧力源直上 ($r=0$) は2つの解析解とFE解析結果との比が最も1から離れる地点であるのに対し、 U_r が最大値を取る地点は球圧力源直上からある程度離れており、2つの解析解とFE解析結果との比が球圧力源直上よりも1に近いことによる。

4.4.3 ϕ の比較

次に、 ϕ (U_{zMAX} と U_{rMAX} との比) を 3 者で比較した結果を Fig.10-3 に示す。山川の解の場合、 $\phi_{(YMK)}$ は先述のように 2.5981 で一定であるが、McTigue の解および FE 解析結果では a/D が大きくなると ϕ も大きくなる。 a/D が 0.5 より大きくなると $\phi_{(FEM)}$ は急速に大きくなるが、 $\phi_{(McT)}$ はやはりその様子を表すことができず、 $\phi_{(FEM)}$ と $\phi_{(YMK)}$ との間に位置する。

ところで、よく知られているように、実際の観測データに山川の解を適用する場合、 a と ΔP との間にトレードオフが生じるため、一般にこれらのパラメータを独立に決定することはできない。しかしながら、 a/D の大きな球圧力源が現実に地下に存在する場合、 ϕ は 2.5981 とは異なる値を取るはずであり、その値から a/D を推定できるはずである。さらに、4.3 節で述べた変

位ベクトルを用いる方法で D を求めることができれば a を決定することができ、 μ の値を仮定すれば ΔP も決定できることになる。

以上で示した最大地点、最大値、および ϕ に関する結果を Table2 にまとめて示す。表中の FEM の値に対してスプライン関数などを適用することにより、任意の a/D についての諸量を算出することが可能であろう。なお、FEM では、同じソフトウェア上の同じモデルでもメッシュが異なれば解析結果に 0.2~0.3% 程度の違いが生じることがあり、ここに示した値は必ずしも絶対的な値ではないことに注意されたい。

4.5 山川の解および McTigue の解の適用限界

以上で示した結果を用い、山川の解および McTigue の解の適用限界について定量的に評価する。2 つの解

Table 2 Distance r where U_{zMAX} and U_{rMAX} appear, values of U_{zMAX} and U_{rMAX} (normalized by $U_{zMAX(YMK)}$, equation (4)), and ϕ (the ratio of U_{zMAX} to U_{rMAX}) of Yamakawa's solution, McTigue's solution, and FE models.

a/D	r of U_{zMAX} point (normalized by D)			r of U_{rMAX} point (normalized by D)		
	Yamakawa	McTigue	FEM	Yamakawa	McTigue	FEM
0.1	0	0	0	0.7071	0.7068	0.7034
0.2	0	0	0	0.7071	0.7050	0.7010
0.3	0	0	0	0.7071	0.7000	0.6983
0.4	0	0	0	0.7071	0.6909	0.6873
0.5	0	0	0	0.7071	0.6772	0.6697
0.6	0	0	0	0.7071	0.6595	0.6395
0.7	0	0	0	0.7071	0.6391	0.5865
0.8	0	0	0	0.7071	0.6180	0.5167
0.9	0	0	0	0.7071	0.5977	0.3903

a/D	U_{zMAX} (normalized by equation (4))			U_{rMAX} (normalized by equation (4))		
	Yamakawa	McTigue	FEM	Yamakawa	McTigue	FEM
0.1	1	1.0010	1.0019	0.3849	0.3852	0.3852
0.2	1	1.0083	1.0083	0.3849	0.3869	0.3869
0.3	1	1.0279	1.0292	0.3849	0.3917	0.3918
0.4	1	1.0661	1.0725	0.3849	0.4011	0.4014
0.5	1	1.1291	1.1528	0.3849	0.4168	0.4185
0.6	1	1.2230	1.2981	0.3849	0.4406	0.4472
0.7	1	1.3542	1.5708	0.3849	0.4744	0.4967
0.8	1	1.5287	2.1594	0.3849	0.5201	0.5896
0.9	1	1.7528	3.9936	0.3849	0.5798	0.8203

a/D	$\phi = U_{zMAX} / U_{rMAX}$		
	Yamakawa	McTigue	FEM
0.1	2.5981	2.5991	2.6012
0.2	2.5981	2.6059	2.6058
0.3	2.5981	2.6241	2.6270
0.4	2.5981	2.6578	2.6720
0.5	2.5981	2.7089	2.7547
0.6	2.5981	2.7760	2.9025
0.7	2.5981	2.8547	3.1622
0.8	2.5981	2.9392	3.6625
0.9	2.5981	3.0232	4.8682

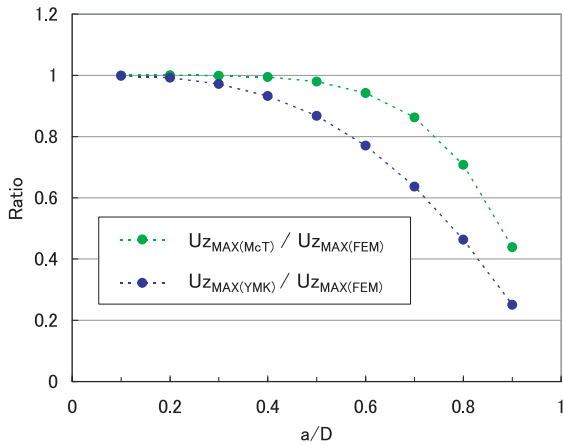


Fig. 11 Ratio of U_{zMAX} of Yamakawa's solution and McTigue's solution to that of FE models for each a/D .

解析の適用限界の指標として、ここでは U_{zMAX} を用いる。これは、Fig.8-1(b)～8-4(b)で示したように、 U_z が最大値を取る球圧力源直上 ($r=0$) は2つの解析解と FE 解析結果との比が最も 1 から離れる地点だからである。ここはまた、モデル端の影響をほとんど受けず、非常に高精度の FE 解析結果が得られる地点でもある (3.3 節参照)。

$U_{zMAX(YMK)}$ および $U_{zMAX(McT)}$ について、それぞれ $U_{zMAX(FEM)}$ との比を取った結果を Fig.11 に示す。いずれも a/D が大きくなるにつれて加速度的に小さくなっていくが、その度合いは当然のことながら高次項のない $U_{zMAX(YMK)}$ の方が大きい。

これらのデータに 3 次のスプライン関数 (自然スプライン) を適用し、 $U_{zMAX(YMK)} / U_{zMAX(FEM)}$ および $U_{zMAX(McT)} / U_{zMAX(FEM)}$ が 0.99, 0.98, ..., 0.90 になる a/D の値を求めた。その結果を Table3 に示す。ただし、スプライン補間に使用するデータ数は、補間する数値を挟む 4 データ (前後 2 データずつ) とした。例えば、 $U_{zMAX(YMK)} / U_{zMAX(FEM)}$ が 0.99 になる a/D を決定する際に

Table 3 Values of a/D where U_{zMAX} of Yamakawa's solution and McTigue's solution become 0.99 to 0.90 times that of the FE model. These values were determined by applying a cubic spline function to values in Fig.11.

Ratio to $U_{zMAX(FEM)}$	a/D	
	$U_{zMAX(YMK)}$	$U_{zMAX(McT)}$
0.99	0.2216	0.4538
0.98	0.2853	0.4990
0.97	0.3068	0.5438
0.96	0.3411	0.5727
0.95	0.3668	0.5901
0.94	0.3868	0.6047
0.93	0.4051	0.6246
0.92	0.4250	0.6414
0.91	0.4426	0.6555
0.90	0.4582	0.6674

は、 $a/D=0.1\sim0.4$ の 4 データを用いた。

Table3 より、例えば FE 解析結果と 1%以内の精度で一致する a/D の大きさは、山川の解では約 0.22, McTigue の解では約 0.45 となる。 a/D がこれらの値より小さい場合には、2つの解析解はそれぞれ充分精度良く成り立つと言えよう。また、FE 解析結果との間に 3%の誤差を許容するならば、その時の a/D は山川の解で約 0.31, McTigue の解で約 0.54 であり、5%の誤差を許容するならば、 a/D は山川の解で約 0.37, McTigue の解で約 0.59 となる。

5. FE 解析結果に山川の解を適用した場合に推定される D および a

火山周辺で観測された地殻変動データへの山川の解の適用は、その簡便さから、地殻変動をもたらした圧力源の深さを推定する際に極めて広く用いられている手法である。この場合、圧力源の性状を $a/D \ll 1$ の球圧力源と仮定していることになる。しかしながら、地下に存在する球圧力源の a/D が大きい場合、これまで見たように、地表面変位は山川の解には一致しない。そこで、今回の FE 解析結果に山川の解を適用して D および a を推定した場合に、それらが本来の値とどの程度異なる値に決定されるかを調べる。以下、FE 解析結果に山川の解を適用して推定される D および a を、それぞれ D_{est} , a_{est} とする。

4.4.1 節で示したように、 $r_{MAX(YMK)}$ は a/D にかかわらず $0.7071D$ で一定であるが、 $r_{MAX(FEM)}$ は $a/D=0.3$ 付近から $0.7071D$ より小さくなる。このことから、 D_{est} は必然的に本来の値より浅く求められることになる。例えば、 $r_{MAX(FEM)}$ が $0.3903D$ まで小さくなる $a/D=0.9$ の場合に(5)式を適用すると、 D_{est} は $0.5520D$ と、本来の深さ (D) の半分近くにまで浅く見積もられることになる。

これと同様のことは最小二乗法を用いる場合にも言える。 $U_{z(FEM)}$ と $U_{r(FEM)}$ のそれぞれに最小二乗法を適用し、FE モデルと同じ ΔP および μ を仮定すると、 D_{est} および a_{est} を同時に決定することができる。各 FE モデルの $U_{z(FEM)}$ と $U_{r(FEM)}$ から求められた D_{est} および a_{est} を Fig.12 および Table4 に示す (D_{est} については各 FE モデルの D で、また、 a_{est} については $a=1\text{km}$ で規格化)。ただし、ここでは、全ての FE モデルについて距離 $r=1.5D$ までの $U_{z(FEM)}$ および $U_{r(FEM)}$ を用いて D_{est} および a_{est} を決定した。これは、遠方のデータを多く含めるとそれらの影響が強くなり、最小二乗法によって決定された山川の解の変位曲線が U_{zMAX} 付近および U_{rMAX} 付近において FE 解析結果とあまり良く一致しなくなるためである。

さて、Fig.12 および Table4 より、 $a/D=0.1$ および 0.2 の場合は、 D_{est} および a_{est} とも元の FE モデルとほぼ同じ値に決定されることが分かる。 a/D が 0.3 以上になると、 D_{est} は真の値より小さく (つまり浅く) 決定されるようになるが、 $U_{z(FEM)}$ による値と $U_{r(FEM)}$ による値は常

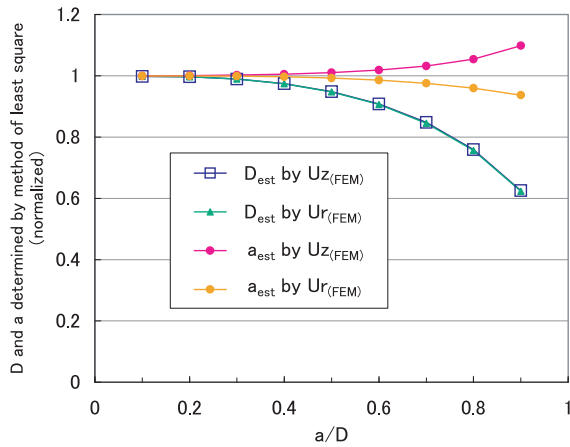


Fig. 12 D and a determined by the method of least squares, fitting Yamakawa's solution to $U_{z(FEM)}$ and $U_{r(FEM)}$. Only nearby data ($r \leq 1.5D$) were used to determine these values.

にほぼ同じ値となり、 $a/D=0.9$ の場合はいずれも $0.62D$ 程度に決定される。一方、 a_{est} については、 a/D が 0.5 以下の場合は真の値と約 1% 以内の精度で決定されるが、 a/D が 0.6 以上になると、 $U_{z(FEM)}$ による値は真の値より若干大きく決定されるようになり、 $U_{r(FEM)}$ による値については逆の傾向を示す。しかしながら、真の値との違いは $a/D=0.9$ の場合でもいずれも 10% 以下と、 D_{est} の場合に比べて小さい。

以上のように、もし a/D が大きな球圧力源が現実存在する場合、それによる地表面変位に山川の解を適用すると、 D は真の値よりも過剰に浅く決定されるが、 a は真の値に比較的近い値に決定される。今、FE モデルと同じ ΔP および μ を仮定しているので、(9)式より、 ΔV も比較的正確に見積もることができることになる。 a は(9)式中に 3 乗の形で入っているため、 a の僅かな誤差が ΔV の見積もりに大きく影響してくるが、Table 4 の a_{est} から ΔV を算出した場合、その見積もり誤差は D_{est} のそれより小さい。

6. まとめ

地下に存在する球圧力源の半径 a が深さ D に比して大きい場合の地表面変位の特徴を明らかにするため、FEM を用いて数値計算を行った。また、その結果を、厳密には a/D が充分小さい場合にしか成立しない山川 (1955) の解や、 a/D が大きい場合にも適用できるとされる McTigue (1987) の解と比較した。これにより、以下のような知見が得られた。

1) a/D を次第に大きくしていった場合、山川の解は早い時点で FE 解析結果と食い違うようになる。また、McTigue の解についても限界が存在する。変位曲線全体について見た場合、FE 解析結果に 1% 以内で一致する a/D の値は、山川の解で 0.22 、McTigue の解で 0.45 である。 a/D がこれより大きくなると、2つの解析解と FE 解析結果との食い違いは次第に顕著になる。

2) a/D が大きくなるにつれ、水平変位 U_r は、山川の解や McTigue の解によって表される地点よりも球圧力源直上に近い地点で最大値を取るようになる。

3) a/D が大きくなるにつれ、 U_z および U_r の最大値は、2つの解析解によって表される値より大きくなる。その度合いは U_r よりも U_z の方が大きい。

4) a/D の大小にかかわらず、地表面の任意の地点は、球圧力源中心とその地点とを結ぶ延長線に変位する。従って、地表面上の 2 点において変位ベクトルが得られれば、それらの延長線が交わった点が球圧力源の中心となる。

5) FE 解析結果に山川の解を適用して D および a を決定すると、 a/D が大きくなった場合、 D は真の値よりも過剰に浅く決定される。一方、 a は真の値に比較的近い値に決定され、従って球圧力源の体積変化量 ΔV も比較的正確に見積もることができる。

なお、本稿では、FE モデルの剛性率 μ の値として上部地殻の標準的な値 40GPa を用いたが、標準的な上部地殻に比べて一般に地震波速度が遅い火山の山体の剛性率はこれより低い値であると考えられることに注意が必要である。剛性率を低くした場合、変位量は剛性率に反比例して増大する。

Table 4 D and a determined by the method of least squares shown in Fig.12.

a/D	Values determined by method of least squares			
	normalized by D		normalized by a ($=1\text{km}$)	
	D_{est} by $U_{z(FEM)}$	D_{est} by $U_{r(FEM)}$	a_{est} by $U_{z(FEM)}$	a_{est} by $U_{r(FEM)}$
0.1	0.9978	0.9985	0.9993	0.9992
0.2	0.9967	0.9966	1.0005	0.9995
0.3	0.9893	0.9891	1.0022	0.9986
0.4	0.9743	0.9738	1.0053	0.9966
0.5	0.9484	0.9474	1.0104	0.9925
0.6	0.9079	0.9062	1.0187	0.9858
0.7	0.8475	0.8450	1.0317	0.9754
0.8	0.7591	0.7562	1.0539	0.9598
0.9	0.6258	0.6232	1.0981	0.9368

謝辞

気象研究所地震火山研究部の伊藤秀美部長（現沖縄気象台長）からは本稿の執筆に際して終始お励ましを頂き、また原稿に対して貴重なご意見を頂きました。厚くお礼申し上げます。同研究部の山里 平室長および北川貞之氏（現気象庁）には原稿を丁寧に読んで頂き、適切なコメントを頂きました。2名の匿名査読者および編集委員の山本剛靖氏からのご指摘は本稿の改善にとって非常に有益でした。以上の方々に深く感謝致します。本研究は気象研究所特別研究「火山活動評価手法の開発研究」（平成 13～17 年度）に関連して行なわれたものです。特別研究の実施に際してお世話頂きました関係諸官に謝意を表します。

参考文献

- 萩原幸男, 1977: 伊豆大島の異常隆起を説明する茂木モデルとそれに伴う重力変化. *東京大学地震研究所彙報*, **52**, 301-309.
- 小柴正則, 1990: 光・波動のための有限要素法の基礎. 森北出版, 227pp.
- 茂木清夫, 1957: 桜島の噴火と周辺の地殻変動との関係. *火山*, **1**, 9-18.
- 坂井孝行・山本哲也・福井敬一・藤原健治・高木朗充・中禮正明, 2007: 有限要素法による火山性地殻変動の計算精度の確立—茂木-山川モデルの再現—. *気象研究所研究報告*, **58**, 1-15.
- 山川宜男, 1955: 内部力源による半無限弾性体の変形について. *地震*, **8**, 84-98.
- McTigue, D. F., 1987: Elastic stress and deformation near a finite spherical magma body: resolution of the point source paradox. *J. Geophys. Res.*, **92-B12**, 12931-12940.

深さに比して相対的に大きな半径を有する球圧力源による地表面変位

—有限要素法による計算—

坂井孝行（気象研究所地震火山研究部）・山本哲也*（気象庁）
 福井敬一（気象研究所地震火山研究部）・藤原健治（気象庁）
 高木朗充（気象研究所地震火山研究部）・中禮正明*（新潟地方気象台）

火山における地殻変動を解釈するモデルとして、従来、山川（1955）の解析解に基づく「茂木-山川モデル」（または、単に「茂木モデル」）が多く用いられてきた。山川の解は、深さに対して充分小さな球圧力源が半無限均質弾性体内に存在するという、限定された条件下においてのみ成立する解であるが、球圧力源の深さ D に対する半径 a がどの程度の場合まで山川の解が精度良く成立するのかについては、定量的な検証はこれまでほとんどなされていない。一方、McTigue（1987）による解析解は、山川の解を a/D が大きい場合にも適用できるよう修正したものであるが、この解についても山川の解と同様、適用限界についての定量的な検証はこれまで行われていない。そこで、本研究では、有限要素法（FEM）を用いて a/D が大きなモデルを作成し、地表面変位の数値解を求め、2つの解析解との比較を行った。その結果、2つの解析解の適用限界が明らかとなった。例えば、FE 解析結果に 1%以内で一致する a/D の値は、山川の解で 0.22, McTigue の解で 0.45 であることが判明した。 a/D がこれらの値より小さな場合には、2つの解析解は充分精度良く成立すると言えよう。 a/D がこれより大きくなると、2つの解析解と FE 解析結果との食い違いは次第に顕著になっていく。一方、FE 解析結果に山川の解を適用して D および a を決定すると、 a/D が大きくなった場合、 D は真の値よりも過剰に浅く決定されるが、 a は真の値に比較的近い値に決定され、従って、圧力源の体積変化量 ΔV も比較的正確に見積もることができる。

* 現所属：地磁気観測所