

第1章 火山活動評価手法の開発

1.1 力学的シミュレーション手法の開発

1.1.1 有限要素法による火山性地殻変動計算精度の確立 —茂木-山川モデルの再現—

有限要素法による火山性地殻変動の計算精度の確立

—茂木-山川モデルの再現—

坂井孝行 (気象研究所地震火山研究部)・山本哲也* (気象庁)
福井敬一 (気象研究所地震火山研究部)・藤原健治 (気象庁)
高木朗充 (気象研究所地震火山研究部)・中禮正明* (新潟地方気象台)
* 現所属：地磁気観測所

Establishment of Precision of Calculation for Volcanic Crustal Deformation by FEM

- Reproduction of Mogi-Yamakawa's Model Using FEM -

by

Takayuki Sakai¹, Tetsuya Yamamoto^{2*}, Keiichi Fukui¹, Kenji Fujiwara²,
Akimichi Takagi¹ and Masaaki Churei^{3*}

1. *Seismology and Volcanology Research Department, Meteorological Research Institute, Tsukuba, Japan*

2. *Japan Meteorological Agency, Tokyo, Japan*

3. *Niigata Local Meteorological Observatory, Niigata, Japan*

* *Present affiliation: Magnetic Observatory, Ishioka, Japan*

(Received June 14, 2006; Accepted December 20, 2006; Published July 10, 2007)

Abstract

Analytical solutions derived under very simplified conditions have been used to explain the crustal deformation around volcanoes. One example is Yamakawa's solution (Yamakawa, 1955), which represents surface deformation caused by small enough spherical pressure source at some depth within a semi-infinite homogeneous elastic body. However, such solutions do not exactly hold true in a real volcano, due to the volcanic edifices that project from the earth's surface, non-spherical pressure sources, inhomogeneous crustal structures, and so on. We use the finite element method (FEM) to create numerical models of a volcano for investigating crustal deformation of a real volcano. The size of the FE model or the setting of its boundary conditions will likely affect the precision of calculation for volcanic crustal deformation. Therefore, we reproduced Mogi-Yamakawa's model (or Mogi's model) using FE models of various model sizes and boundary conditions. We then quantitatively evaluated the influence of model size and boundary conditions on the precision of calculation. The results are as follows. As the FE model becomes larger, the results of FE analysis approach Yamakawa's solution, which demonstrates an improved precision of calculation. However, the smallest possible FE model is recommended so far as the necessary precision of calculation is ensured, because a large model generally produces a large number of nodes which leads to an accelerative increase in calculation time. The boundary condition of fixing bottom and side surfaces of an FE model completely is recommended because the changes in precision of calculation with distance are similar for both vertical and horizontal displacements. The vertical and horizontal sizes of the FE model remarkably affect the precision of calculation for vertical and horizontal displacements, respectively.

Corresponding author: Takayuki Sakai
Meteorological Research Institute,
1-1 Nagamine, Tsukuba, Ibaraki 305-0052, Japan.
E-mail: tsakai@mri-jma.go.jp

1. はじめに

火山における地殻変動を解釈するモデルとして、従来、いわゆる「茂木-山川モデル」(または、単に「茂木モデル」)が多く用いられてきた。このモデルは、山川(1955)が導出した地下の球圧力源による地表面変位の解析解(以下「山川の解」)を、茂木(1957)が桜島の大正大噴火(1914年)前後の始良カルデラ周辺の地殻変動に適用したことからそう呼ばれている。

山川の解は、深さに対して充分小さな球圧力源が半無限均質弾性体内に存在するという、非常に限定された条件下においてのみ精度良く成立する(山川, 1955)。一方、現実の火山においては、地表面上に突出する火山地形が存在するため、山川の解の前提条件はそもそも完全には成り立たない。また、火山体の直下や周辺での不均質な構造が、自然地震の解析(例えば、山本・井田, 1994; Ohmi and Lees, 1995)や人工地震探査(例えば、西, 1997; Yamawaki *et al.*, 2004)によって既に幾つかの火山で明らかになっているほか、楕円体(例えば、Yang and Davis, 1988)やパイプ状(例えば、Bonaccorso and Davis, 1999)など球形以外の圧力源形状が想定されたり、あるいは、圧力源形状が球であっても、山川の解が精度良く成立しないような非常に浅い場所にそれが存在するような場合も想定されうる。そこで我々は、現実の火山における地殻変動の様子をより詳しく知るため、物体を仮想的に多数の要素(element)に分割して数値解を求める有限要素法(finite element method, 以下「FEM」)を用いて、実際の火山地形や地下の速度構造を取り込んだ三次元の有限要素モデル(finite element model, 以下「FEモデル」)を作成し、有限要素解析(finite element analysis, 以下「FE解析」、あるいは、混同の恐れがない場合には単に「解析」と略すこともある)を進めている。

その研究を始めるに当たり、FEMによる火山性地殻変動の計算精度を確認する必要があった。勿論、FEM自体は既に確立されている数値計算技術である。それは主に工学分野で使用され、自動車や航空機などの機械製品や、ビルや橋梁などの建造物等の設計に広く用いられている計算手法である。このような工学分野でのFE解析は、通常、解析対象全体をモデリングして行なわれる。一方、FEMを火山性地殻変動の計算に適用する際には、火山周辺の数km~数十km程度の範囲の局所的な地殻変動を計算するためだけに固体地球全体をモデリングする必要はないと考えられ、実際、Dieterich and Decker(1975)やBianchi *et al.*(1984)をはじめとする幾つかの先行研究は、水平方向にも深さ方向にも固体地球の一部を切り取ったFEモデルを作成して解析を行っている。ところで、そのように固体地球の一部のみをモデル領域とするFEモデルでは、モデル端の影響が大きいことが予想され、高い計算精度を得るにはモデル領域の大きさや境界条件の設定が重要になると考えられる。しかしながら、過去の研究の多くはある程度大きなモデル領域を漠然と設定しているのみで、モデル領域の大きさや境界条件の設

定が計算精度に与える影響についての定量的な検討はほとんどなされていない。他方、一部のFEM汎用ソフトウェアでは、無限要素(infinite element)と呼ばれる、有限要素の一端を無限遠に移動した特殊な要素を用いて無限領域を近似し、通常の有限要素近似と組み合わせることもできる(例えば、鷺津ほか共編, 1983; 小柴, 1990)が、そのような要素を備えたソフトウェアは少なく、あまり一般的ではない。

FEMによる火山性地殻変動の計算精度を確認するには、何らかの解析解が存在する状況をFEモデルで再現し、その計算結果を解析解と比較すれば良い。Trasatti *et al.*(2003)は、エトナ山の近似山体地形および構造を取り入れてFE解析を行うに当たり、その計算精度を確かめるため、地下に球圧力源を置いたFEモデル(地表面平面、均質)と山川の解との比較を行っている。彼らは、中心深さ D が1.5kmから19kmまでの4例の球圧力源(半径 a は0.6kmあるいは2km)について、水平方向、深さ方向とも200kmの大規模なモデル領域を設定して計算を行い、確かに山川の解に概ね良く一致する結果を示している。しかしながら、そこには、解析結果が山川の解の変位曲線に概ね良く乗っている様子がグラフ上で視覚的に示されているのみであり、計算精度についての具体的な数値は記述されていない。また、モデル領域が200kmより小さい場合の計算精度についても議論されていない。

そこで、本稿では、山川の解が要請する「深さに対して充分小さい」という条件を満たす球圧力源の周囲に様々な大きさのモデル領域を設定し、また、境界条件を幾つか変えてFE解析を行い、それらの解析結果を山川の解と比較することによって、FEMを用いて火山性地殻変動を計算する際にモデル領域の大きさや境界条件が計算精度に及ぼす影響について定量的に評価する。

2. 山川の解とFEMによる数値解

2.1 山川(1955)の球圧力源による地表面変位の解

山川(1955)によると、剛性率 μ の半無限均質弾性体内に球核(中心深さ D , 半径 a)が存在し、その表面に ΔP の圧力変化が加わった場合(Fig.1)、球圧力源直上からの水平距離が r の地点にある地表面上の点の上下変位 U_z およびradial方向の水平変位 U_r は次の解析解で表される。ただし、ラメの定数 λ は μ に等しいとし、また、山川の解による U_z および U_r であることを明確にするため、以下それぞれ $U_{z(YMK)}$, $U_{r(YMK)}$ と表記する。

$$U_{z(YMK)} = \frac{3a^3 \Delta P}{4\mu} \frac{D}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \quad \dots(1)$$

$$U_{r(YMK)} = \frac{3a^3 \Delta P}{4\mu} \frac{r}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \quad \dots(2)$$

なお、 z 軸については、原論文では鉛直下向きを正としているが、ここでは鉛直上向きを正として(1)式の符号を変え、 $U_{z(YMK)} > 0$ の場合に地表面の隆起を表すこととする。

この解は $a/D \ll 1$ の場合に、より具体的には $a/D \leq 0.1$ の場合に、十分に良い近似を与える (山川, 1955)。

(1)(2)式より、

$$\frac{U_{z(YMK)}}{U_{r(YMK)}} = \frac{D}{r} \quad \dots(3)$$

という関係が成り立つことから、地表面上の任意の地点は、Fig.1に見られるように、球圧力源中心とその地点とを結ぶ直線の延長線上に変位する。

$\Delta P > 0$ (隆起) の場合について、 r と $U_{z(YMK)}$ および $U_{r(YMK)}$ との関係を Fig.2 に示す。横軸は D によって、また縦軸は $U_{z(YMK)}$ の最大値 (下記(4)式) によってそれぞれ規格化している。 $r=D$ において $U_{z(YMK)}$ と $U_{r(YMK)}$ は

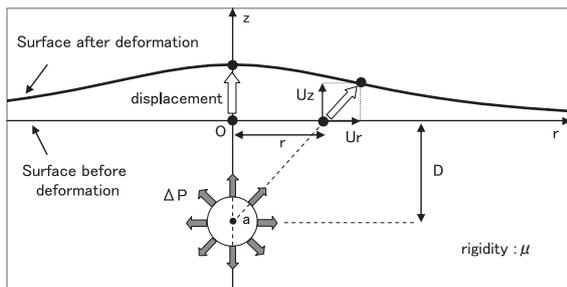


Fig. 1 Schematic illustration of Mogi-Yamakawa's model (or Mogi's model). U_z and U_r indicate vertical and horizontal displacements of the surface, respectively. D and a indicate depth and radius of the spherical pressure source, respectively. r is the distance between a surface point and a point just above the center of the pressure source. ΔP indicates pressure change at the pressure source.

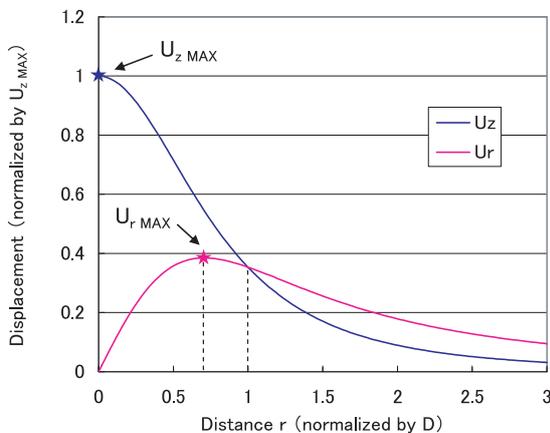


Fig. 2 Relationship between distance r and displacement (U_z and U_r) of Yamakawa's solution. The horizontal axis is normalized by D , and the vertical axis is normalized by U_{zMAX} (the maximum of U_z). U_{rMAX} indicates the maximum of U_r .

交点を持ち、大小関係が入れ替わる。 $U_{z(YMK)}$ は r に関する単調減少関数であり、 $r=0$ (球圧力源直上) において、最大値

$$U_{zMAX(YMK)} = \frac{3a^3 \Delta P}{4\mu} \frac{1}{D^2} \quad \dots(4)$$

を取る。一方、 $U_{r(YMK)}$ については、最大値を取る地点を $r_{MAX(YMK)}$ とすると、(2)式を r で偏微分することにより、

$$r_{MAX(YMK)} = \frac{D}{\sqrt{2}} \cong 0.7071D \quad \dots(5)$$

において最大値

$$U_{rMAX(YMK)} = \frac{3a^3 \Delta P}{4\mu} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(3/2)^{3/2}} \frac{1}{D^2} \quad \dots(6)$$

を取ることが導かれる。

2.2 FEMの概要と使用ソフトウェア

FEMとは、物体の形状が複雑な場合など解析的に扱うことが困難である場合に、その物体を仮想的に多数の有限の大きさの要素に分割 (meshing, 以下「メッシュング」) して数値解を求める手法である。FEMの特長として、複雑な形状のモデルと不均質性媒質のいずれに対しても取り扱いが容易なことが挙げられる。このような特長は、差分法 (finite difference method, 複雑な形状のモデルの扱いが困難) や境界要素法 (boundary element method, 不均質な媒質の扱いが困難) など、他の解析手法には見られないものである。従ってFEMは、火山地形という複雑な形状を一般に有し、かつ不均質な地下構造が想定される現実の火山をモデリングするのに最も適した手法と考えられる。FEMでは要素内部の変位は形状関数 (shape function) と呼ばれる関数によって補間され、それぞれの要素についての要素マトリックスを作成した後に、物体全体についての境界条件を組み込みつつ全ての要素マトリックスを統合した全体マトリックスを作成し、それを解いて数値解が求められる。二次元FEモデルの場合は三角形要素や四角形要素が、また三次元FEモデルの場合は主として四面体要素や六面体要素がそれぞれ用いられ、それらの多角形や多面体の頂点は節点 (node) と呼ばれる。FE解析の基本的なテクニックとして、一般に、

- 解析対象の形状をできるだけ忠実に表現する
- 曲面部分や応力が集中する領域は細かくメッシュングする

- ・隣接する要素の大きさを急激に変えず徐々に変化させる
- ・要素の形状を極端に扁平にしない

などが挙げられる（例えば、三好ほか，1998）。

FEM に関しては汎用ソフトウェアが多数商用化されており、今回の三次元 FE モデル作成および解析には ANSYS, Inc. の ANSYS Ver.7.0 を用いた。三次元 FE モデルにおいて球面などの曲面を扱う際は四面体要素が通常用いられる。今回はより高い計算精度が得られるよう、形状関数が座標の二次関数で表される四面体要素 (Fig.3) を用いた。この場合、Fig.3 に見られるように、節点間に 6 個の中間節点 (midside node) が配置され、要素内のある点の例えば x 方向の変位 u は次式で補間される（例えば、小柴，1990）。

$$\begin{aligned}
 u = & u_I(2L_1 - 1)L_1 + u_J(2L_2 - 1)L_2 \\
 & + u_K(2L_3 - 1)L_3 + u_L(2L_4 - 1)L_4 \\
 & + 4u_M L_1 L_2 + 4u_N L_2 L_3 + 4u_O L_1 L_3 \\
 & + 4u_P L_1 L_4 + 4u_Q L_2 L_4 + 4u_R L_3 L_4 \quad \dots(7)
 \end{aligned}$$

ここで、 $u_I \sim u_R$ はそれぞれ節点 $I \sim L$ および中間節点 $M \sim R$ における x 方向の変位であり、 $L_1 \sim L_4$ は要素の体積によって規格化された体積座標変数と呼ばれる座標変数である。 y 方向および z 方向の変位についても同様にして補間が行われる。

3. モデル領域の大きさが計算精度に及ぼす影響

以下の文中では、FE 解析によって得られたモデル地表面上の点の上下変位 U_z および水平変位 U_r をそれぞれ $U_{z(FEM)}$ 、 $U_{r(FEM)}$ と表記する。

固体地球表面の曲率は無視し、地表面を平面とする。地下に存在する、ある球核 ($D=10\text{km}$, $a=1\text{km}$ とする) の周囲に円柱形のモデル領域を考える。ただし、球核

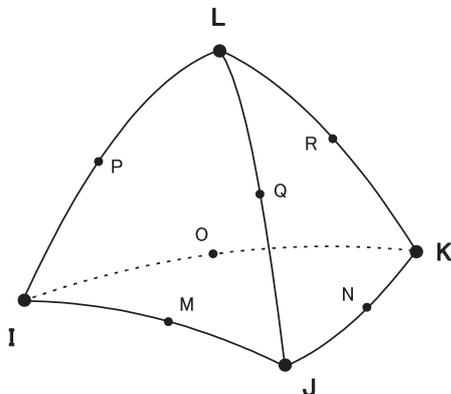


Fig. 3 Three-dimensional, 10-Node tetrahedral element used in this finite element analysis (FEA). I, J, K and L are nodes. M, N, O, P, Q and R are midside nodes. The shape function of this element is represented by a quadratic function.

は円柱モデル領域の中心軸上に存在するものとする。円柱モデル領域の半径を R 、高さ（地表面からモデル底面までの深さ）を H とする。本節では R と H を等しく設定し、その上で R および H の大きさを様々に変え、各 FE モデルの解析結果と山川の解とを比較する。以下、 R および H をある大きさ (km) に設定した FE モデルのことを、その大きさを冠して「 〇〇km モデル」と呼ぶ。例えば、 $R=H=100\text{km}$ に設定した FE モデルのことを「 100km モデル」と呼ぶ。また、 U_z および U_r について FE 解析結果と山川の解との比を取ったもの（つまり、 $U_{z(FEM)} / U_{z(YMK)}$ および $U_{r(FEM)} / U_{r(YMK)}$ ）をそれぞれ「 U_z 比」「 U_r 比」と呼ぶことにする。

球核の a/D を 0.1 ($=1\text{km}/10\text{km}$) に設定したのは、山川の解が充分良く成り立つ条件の下で FE 解析結果を山川の解と比較するためである。この時、この球核の周囲に設定されたモデル領域の大きさおよび境界条件の設定が適切であれば、FE 解析結果は山川の解に良く一致するはずであるし、逆に、モデルの設定が適切でない場合には、FE 解析結果は山川の解から乖離するはずである。従って、今の場合、 U_z 比および U_r 比は FEM による火山性地殻変動の計算精度を表す値であり、それらが 1 に近いモデルほど計算精度の高い適切なモデルと言える。

FE モデルの媒質は山川の解に合わせて均質かつ $\lambda = \mu$ (従ってポアソン比は 0.25) とする。剛性率 μ の値として、茂木 (1957) に従い 40GPa を用いる（ただし、同論文では「 $\mu=4 \times 10^{11}$ 」とのみ記されており単位の記述がないが、その単位は CGS 単位系の dyn/cm^2 である）。この値は上部地殻の標準的な値である（例えば、大中・松浦，2002）。この時、ヤング率は 100GPa となる。球核の表面に加わる圧力変化 ΔP は正（外向き）とし、その大きさは各モデルとも 1000atm ($=0.101325\text{GPa}$) に統一する。

3.1 モデル領域が小さい場合

まず、 R および H を D ($=10\text{km}$) の 1.5 倍の 15km に設定した「 15km モデル」について考察してみる。モデルの外観を Fig.4-1 に示す。これは円柱モデル領域のうち、方位角方向に 90 度に切断した、全体の $1/4$ の領域に過ぎないが、軸対称モデルの場合はこの 2 つの切断面に対称境界条件を設定して FE 解析を行うことにより、要素数および節点数を 360 度円柱モデルの場合の約 $1/4$ に減らしつつ、 360 度円柱モデルと全く同じ解析結果を得ることができる。ANSYS Ver.7.0 では、全体マトリックスを解くのに要する CPU 時間は要素数および節点数のおよそ 2 乗に比例して増大するため、 90 度円柱モデルは 360 度円柱モデルの $1/16$ 程度の時間で計算を完了することができる。メッシュの設定は、球核 (モデル左下方) の表面のメッシュサイズを 100m 程度と十分に小さくし、また、地表面 (モデル上面) のメッシュサイズを 1000m 程度とした。その結果、要素数は 6977 個、節点数は中間節点を含めて 11505 個となった。また、本節では、円柱モデル領域の底面および外周面 (球圧力源直上からの水平距離 $r=15\text{km}$ の円柱

側面) に対する境界条件はいずれも完全固定 (上下方向、水平方向の変位をいずれもゼロに拘束) とする。なお、第5節で述べるように、この境界条件は今回の解析で我々が最も適当であると考えられる境界条件である。

この FE モデルの地表面上の節点の変位 $U_{z(FEM)}$ および $U_{r(FEM)}$ を、山川の解と併せて Fig.4-2(a) に示す。図中、 $U_{z(FEM)}$ および $U_{r(FEM)}$ (中間節点を含めて 500m 間隔) は丸印で、山川の解は実線で示してある。また、Fig.4-2(b) には U_z 比および U_r 比を示す。なお、 $r=0\text{km}$ (球圧力源直上) では $U_{r(FEM)}$ も $U_{r(YMK)}$ も 0 となるため、 U_r 比は示していない。この 15km モデルの場合、 $r=15\text{km}$ 地点は円柱モデル領域の外周面上にあり、そこには完全固定の境界条件を課しているため、 $U_{z(FEM)} = U_{r(FEM)} = 0$ となる。その影響はモデル外縁部のみならずモデル中間部にまで及び、 U_z では 10.5km 以遠の地点で、 U_r では 6.0km 以遠の地点で、FE 解析結果は山川の解より小さい値を取る。逆に、モデル中心部では、特に $U_{z(FEM)}$ で過剰な変位が目立ち、例えば $r=0\text{km}$ での U_z 比は 1.228 となる。これは、完全固定の境界条件が課されているモデル領域底面および外周面の影響と考えられる。実際の固体地球の場合には、圧力源による変位は無限に伝播する。しかし、本計算では、球圧力源によって本来は外向きに変位すべきモデル領域底面および外周面の各地点が完全固定されて変位できないことにより、モデルの唯一の自由面である地表面 (ただしその外周端は完全固定) の中心部に変位が集中したものと考えられる。一方、 $U_{r(FEM)}$ の最大値は、山川の解が最大値を取る距離 ($D=10\text{km}$ を(5)式に代入して $r_{MAX(YMK)} = 7.071\text{km}$) よりやや小さい距離に現れている様子が見取れる。

このように、モデル領域が小さい場合は、完全固定されているモデル領域底面および外周面の影響を強く受け、山川の解を精度良く再現することはできない。

3.2 モデル領域を拡大した場合

次に、円柱形のモデル領域の R および H を次第に大きくした場合の解析結果を示す。なお、本稿で扱う FE モデルは全て上記の 15km モデルと同様の軸対称モデルであり、対称境界条件を設定することが可能であることから、計算の効率化のため、本稿では以下の全てのモデルについて 1/4 モデルを使用する。

3.2.1 大きなモデル領域を有する幾つかの FE モデルの概要

$R=H=30\text{km}$ に設定した「30km モデル」の解析結果を Fig.5 に示す。なお、このモデルのメッシュの設定は、上記の 15km モデルと同様、球核の表面のメッシュサイズを 100m 程度、地表面のメッシュサイズを 1000m 程度とした。この FE モデルの $r=30\text{km}$ 地点は円柱モデル領域の外周面上であり完全固定されているため、やはり $U_{z(FEM)} = U_{r(FEM)} = 0$ となる。しかしながら、15km 地点での U_z 比および U_r 比はそれぞれ 0.899 および 0.853 となっており、先の 15km モデル (15km 地点で U_z 比 = U_r 比 = 0) に比べれば格段の改善が見られる。また、 r

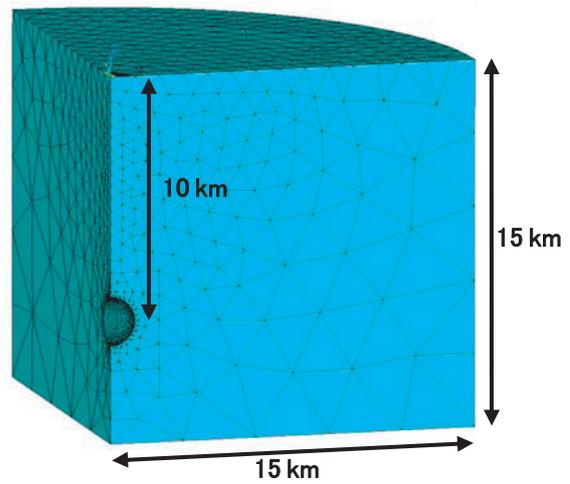


Fig. 4-1 Exterior of "15km model", an FE model where radius R and height H of the columnar FE model region are each 15km. Radius a and depth D of the spherical pressure source are 1km and 10km, respectively.

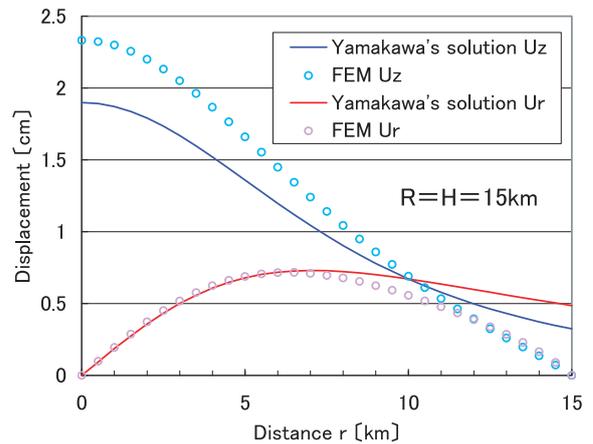


Fig. 4-2(a) Comparison of results of FEA of "15km model" and Yamakawa's solution. The results of FEA are plotted at intervals of 500m, including midside nodes. The point at $r=15\text{km}$ on the FE model is completely fixed, so the displacements decrease to zero at that point.

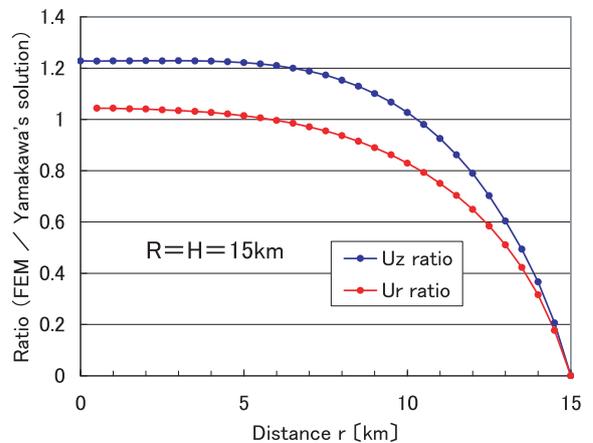


Fig. 4-2(b) Ratio of results of FEA of "15km model" to Yamakawa's solution. "Uz ratio" means the ratio of $U_{z(FEM)}$ (U_z of FE models) to $U_{z(YMK)}$ (U_z of Yamakawa's solution), and "Ur ratio" means that of U_r .

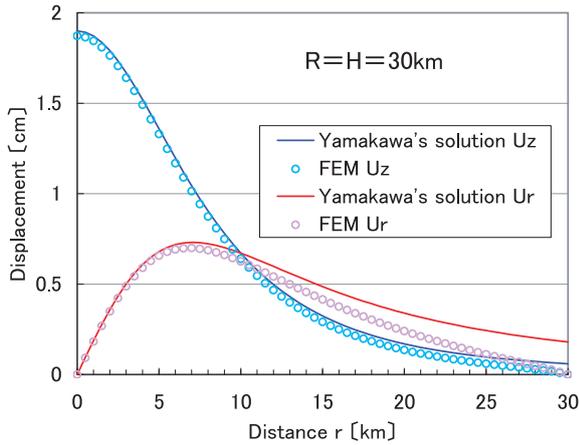


Fig. 5 Comparison of results of FEA of "30km model" ($R=H=30\text{km}$) and Yamakawa's solution. The point at $r=30\text{km}$ on the FE model is completely fixed, so the displacements decrease to zero at that point. However, remarkable improvement in precision of calculation is recognized at $r=15\text{km}$ when compared to the "15km model" (see Fig.4-2(a)).

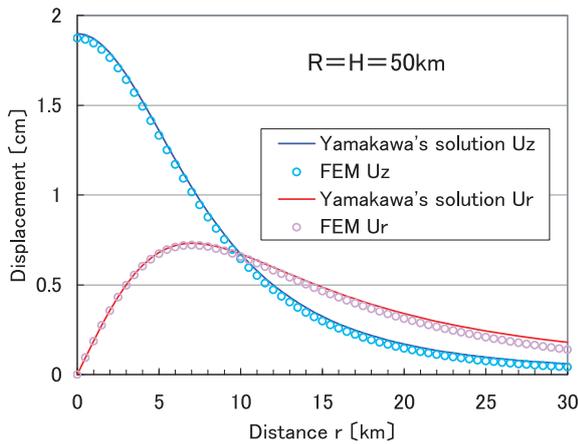


Fig. 6 Comparison of results of FEA of "50km model" ($R=H=50\text{km}$) and Yamakawa's solution. The horizontal axis (distance r) is shown as far as 30km. Some improvement in precision of calculation is recognized when compared to the "30km model" (see Fig.5). However, the result of FEA does not agree with Yamakawa's solution so well.

=0km での U_z 比も 0.986 と、15km モデルの場合 (1.228) に比べてずっと 1 に近い。このことから、高い計算精度を得るには、モデル領域底面および外周面の影響が弱まるよう充分大きな領域を有する FE モデルを用意し、その中心部だけの解析結果を用いれば良いと予想される。

そこで、以下では、高い計算精度を得ることを目標とするモデル中心部の範囲を、 $D (=10\text{km})$ の 3 倍の 30km 地点までと設定し、モデル領域を次第に大きくした場合に計算精度がどの程度まで高まるかを確かめる。ここで、高い計算精度を目標とする範囲を D の 3 倍までと設定したのは、Fig.2 に見られるように、 U_r は最大となる地点を過ぎてからの減少率が小さく、 D の約 3 倍の距離で漸く最大値の約 1/4 まで減少することを考慮してのことである。実際の火山での地殻変動観測で

U_r の変化の様子の全体像を掴むには、この程度の距離までのデータを得ることが望ましく、従って FEM でもこの程度の距離まで高い計算精度を確保することが必要と考えられる。

$R=H=50\text{km}$ に設定した「50km モデル」の解析結果を Fig.6 に示す。なお、このモデルについても、15km モデルや 30km モデルと同様に、球核の表面のメッシュサイズを 100m 程度、地表面のメッシュサイズを 1000m 程度とした。横軸 r は上で設定した目標に従い 30km までを示す (図示は省略したが、モデル外周面上となる $r = 50\text{km}$ 地点では完全固定の境界条件によってやはり $U_z(FEM) = U_r(FEM) = 0$ となっている)。先の 30km モデルでは、モデル外周面上であり完全固定されている $r = 30\text{km}$ 地点に近づくにつれて FE 解析結果と山川の解との乖離が大きくなったが、この 50km モデルでは、30km 地点での U_z 比および U_r 比はそれぞれ 0.691 および 0.770 に改善されている。しかしながら、目標の 30km 地点まで山川の解を精度良く再現するにはまだ程遠い。

そこで、 R および H をさらに大きく設定してみる。 $R = H = 150\text{km}$ に設定した「150km モデル」の解析結果を

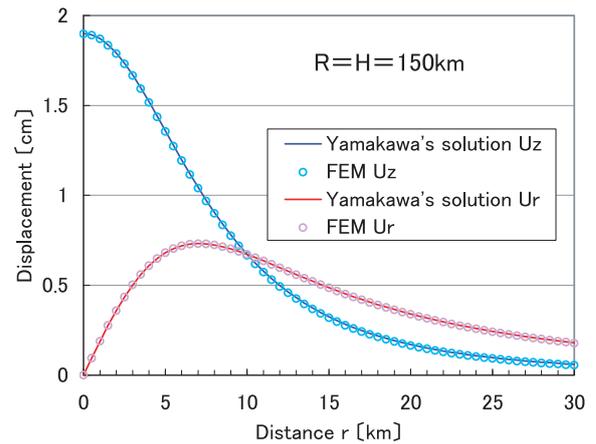


Fig. 7-1(a) Comparison of results of FEA of "150km model" ($R=H=150\text{km}$) and Yamakawa's solution. The horizontal axis (distance r) is shown as far as 30km. The results of the FEA indicate agreement with Yamakawa's solution throughout the graph.

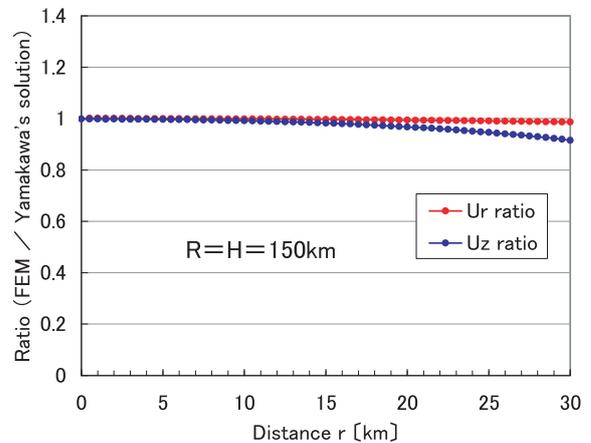


Fig. 7-1(b) U_z and U_r ratios of the "150km model".

Fig.7-1(a)に、 U_z 比および U_r 比を Fig.7-1(b)に示す。30km 地点までの全域にわたって山川の解が精度良く再現されていることが分かる。30km 地点での U_z 比および U_r 比はそれぞれ 0.916 および 0.987 で、上記の 50km モデルと比較しても格段に改善されている。

ところで、この 150km モデルのようにモデル領域を大きくすると、必然的に節点数が増加し、計算時間が増大したり、場合によっては計算機的能力を超えてしまうため、節点数をなるべく減らす工夫が必要となってくる。この 150km モデルを作成する際にも、先述の FE 解析の基本的なテクニックに従い、節点数を減らす工夫を加えた。150km モデルの全体像およびモデル中心部の拡大図をそれぞれ Fig.7-2(a)および Fig.7-2(b)に示す。 $r=30\text{km}$ までのモデル中心部については上述の各モデルと同じ設定で細かくメッシングしつつ、それ以遠のモデル外周部についてはメッシュサイズが次第に粗くなるよう設定した。本稿で扱う球圧力源モデルの場合、応力は球圧力源が存在するモデル中心部に集中するため、モデル外周部のメッシングをこのように粗くしてもモデル中心部の計算精度にはほとんど影響

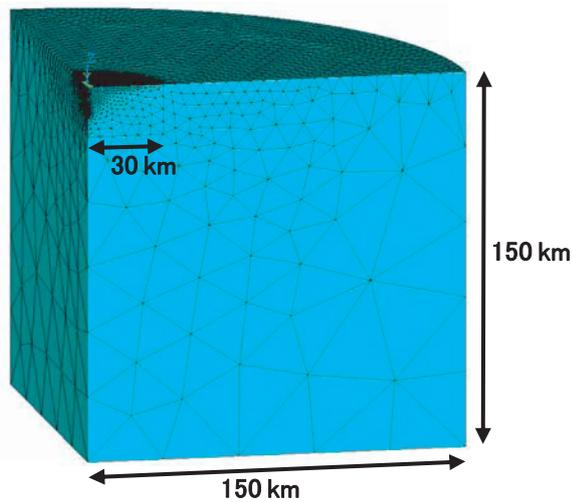


Fig. 7-2(a) Whole exterior of the "150km model".

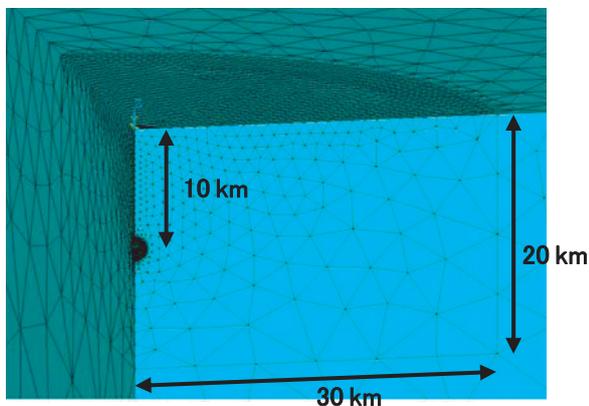


Fig. 7-2(b) Central part of the "150km model". Radius a and depth D of the spherical pressure source are 1km and 10km, respectively.

しない。この 150km モデルの場合、先の 15km モデルに比べてモデル領域の体積が 10^3 倍になっているのに対し、要素数は 39131 個、節点数は中間節点を含めて 58227 個と、いずれも 15km モデルの 5 倍程度に抑えることに成功しており、従って計算時間も 15km モデルの場合の 25 倍 ($=5^2$) 程度に抑えられている。

3.2.2 モデル領域の大きさと計算精度との関係

円柱形のモデル領域の R および H を次第に大きくした場合の計算精度の改善の様子を詳しく見るため、 R および H を 12km から 200km まで徐々に変化させて FE モデルを作成し、解析を行った。なお、FEM では、同じソフトウェア上の同じモデルであっても、メッシングが異なれば解析結果に 0.2~0.3%程度の違いを生じることがあるが、ここではメッシングの違いが解析結果に及ぼす影響を可能な限り排除するため、各モデルのメッシングに統一性を持たせた。特に、応力が集中するモデル中心部については全モデルとも上述の 4 モデルと同一の設定でメッシングを行った。また、モデル中心部以外についても、例えばモデル最外縁部の分割数を全モデルとも 5 分割とするなど、メッシングに統一性を持たせるよう努めた。

R および H を次第に大きくした場合の、FE モデル中心部の幾つかの地点での U_z 比と U_r 比の改善の様子を Fig.8-1 に示す。 U_z 比については、山川の解が最大値を取る $r=0\text{km}$ 地点 (球圧力源直上) と、10km, 20km, 30km 地点での値を示し、 U_r 比については、山川の解が最大値を取る $r=7.071\text{km}$ 地点 ((5)式参照) と、10km, 20km, 30km 地点での値を示した。なお、FE 解析結果は中間節点も含めて 500m 間隔で算出されるが、 $r=7.071\text{km}$ 地点での $U_{r(FEM)}$ は、(7)式の形状関数を使用する ANSYS の補間ツールによって求めた。

まず U_r 比について見ると、モデル領域が小さいうちは各地点での値が 1 とは大きく異なることが多いが、モデル領域が大きくなるにつれて順調に 1 に収束していくことが分かる。特に、モデル中心部に位置し、モデル外周面の影響が小さい 7.071km および 10km 地点の U_r 比の 1 への収束は早い。なお、20km モデルでは 20km 地点での比が 0 に、また 30km モデルでは 30km 地点での比が 0 になっているのは、モデル領域の外周面を完全固定しているためである。

次に、 U_z 比についても基本的には U_r 比と同様の傾向が見られ、モデル領域が大きくなるにつれてモデル中心部の 0km および 10km 地点は早く 1 に収束する。だが、20km および 30km 地点での 1 への収束は明らかに U_r 比より遅い。この理由については、現時点ではよく分からない。しかしながら、本稿の目的はその解明ではなく、FEM による火山性地殻変動の計算精度を確立することであるため、ここでは以上の解析結果を示すに止める。また、0km および 10km 地点での U_z 比と、7.071km 地点での U_r 比が、1 以上の値から 1 以下に一度下がった後に 1 に収束していくというやや複雑な変化を見せることも興味深い現象であるが、その理由の解

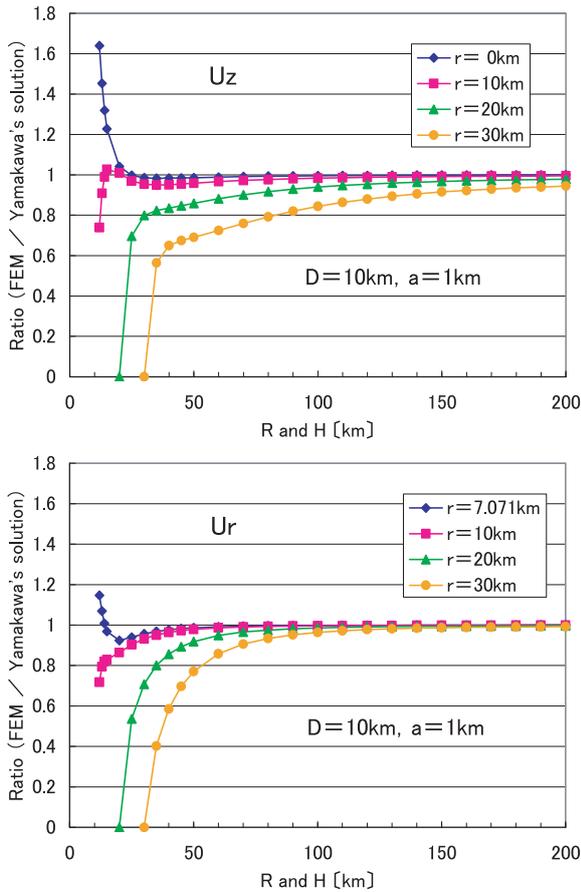


Fig. 8-1 U_z and U_r ratios at some points on various FE models when R and H are changed from 12km to 200km. The U_z ratios at $r=0\text{km}$, 10km, 20km and 30km are indicated, as well as the U_r ratios at $r=7.071\text{km}$, 10km, 20km and 30km. Radius a and depth D of the spherical pressure source are fixed at 1km and 10km, respectively. Ratios approach 1 with the increase of R and H , which indicates improved precision of calculation.

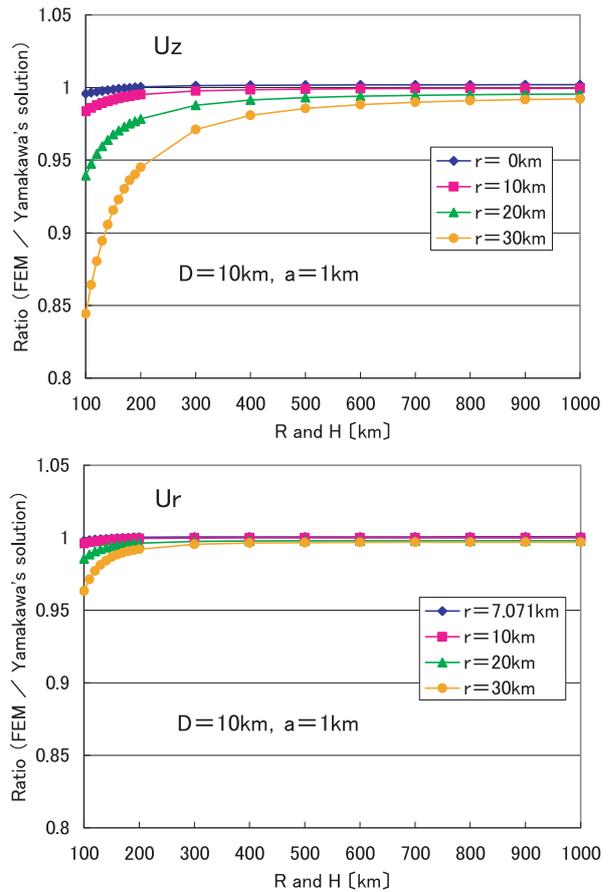


Fig. 8-2 U_z and U_r ratios at some points on various FE models when R and H are enlarged to 1000km. Further improvement in precision of calculation is seen.

明も本稿の目的とするところではないため、詳しい検討は後の機会に譲ることとし、ここでは議論を先に進める。

20km および 30km 地点での U_z にこれ以上の計算精度が必要な場合には、 $R=H=200\text{km}$ よりもさらに大きなモデル領域を設定すれば良いことが予想される。そこで、 R および H が 300km から 1000km までの FE モデルをさらに作成して解析を行った。それらの U_z 比および U_r 比を Fig.8-2 に示す。比が 1 に収束していく様子を詳しく見るため、グラフ左端は $R=H=100\text{km}$ としており、Fig.8-1 とは縦軸のスケールが異なることに注意されたい。予想通り、モデル領域を大きくするほど、20km および 30km 地点での U_z 比に一層の改善が見られる。

ただし、高い計算精度を求めてモデル領域を大きくした場合には、計算の効率化のために先述のような節点数を減らす工夫を行っても節点数の増加は避けられず、それに従い計算時間が加速度的に増大することに注意が必要である。計算時間の観点からはモデル領域はできるだけ小さい方が有利であり、必要とする計算

精度が確保される範囲内でなるべく小さなモデル領域を設定するのが良いと考えられる。さらに、ANSYS ではモデル領域を大きくするほどメッシュが次第に困難となる傾向もある（ANSYS では一般に、微細な形状が大きなモデル領域の中に存在する場合、両者の大き

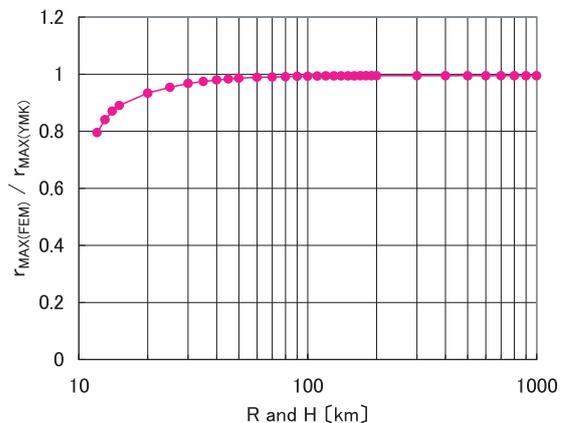


Fig. 9 Ratio of $r_{MAX(FEM)}$ (the distance where U_r of FE models reaches its maximum) to $r_{MAX(YMK)}$ (the distance where U_r of Yamakawa's solution reaches its maximum, 7.071km). Each $r_{MAX(FEM)}$ was determined by interpolating tool of ANSYS using the quadratic shape function.

さの比が小さくなるほどメッシングが困難となっていく)。

他方、各モデルの $U_{r(FEM)}$ が最大値を取る地点についても、先述の ANSYS の補間ツールを用いて 1m 単位で決定した。これを $r_{MAX(FEM)}$ とし、山川の解が最大値を取る地点 $r_{MAX(YMK)} = 7.071\text{km}$ との比を Fig.9 に示す。横軸はグラフの見やすさを考慮して対数目盛で示した。R および H が小さい場合は、先述の 15km モデル (Fig.4-2(a)参照) でも見られたように、 $r_{MAX(FEM)}$ は $r_{MAX(YMK)}$ より小さい距離に現れ、従って両者の比は 1 より小さいが、R および H が 80km になると $r_{MAX(YMK)}$ と 1%以内で一致するようになり、最終的に約 0.5%の精度で $r_{MAX(YMK)}$ に一致する。なお、 $U_z(FEM)$ については、いずれのモデルでも山川の解と同様に $r=0\text{km}$ (球圧力源直上) で最大値を取る。

4. FE モデルの相似則と計算精度のまとめ

ここまでは $D=10\text{km}$, $a=1\text{km}$ という一つの具体的な球圧力源を用いて計算を進めてきたが、FE モデルで

は各部の比率を保ちつつモデル全体の大きさを変えた場合に相似則が成り立つため、D が 10km 以外の FE モデルについても、前節で見た $D=10\text{km}$ の各 FE モデルの解析結果からその計算精度を知ることができる。

具体例を挙げると、D および a をそれぞれ、これまでの各モデルの 1/2 の 5km および 0.5km にすると同時に、円柱モデル領域の R および H を前述の「150km モデル」($D=10\text{km}$, $a=1\text{km}$) の 1/2 の 75km とした FE モデルを作成して解析を行うと、例えば $r=15\text{km}$ 地点での U_z 比は、150km モデルの $r=30\text{km}$ 地点での U_z 比 0.916 と等しくなる。同様に、他の地点での U_z 比や U_r 比も、150km モデル上の対応する地点 (r が 2 倍の地点) での値に一致しており、従って相似則が成り立っている。あるいは逆に、D および a をそれぞれこれまでの各モデルの 2 倍の 20km および 2km にすると共に、R および H を 150km モデルの 2 倍の 300km とした FE モデルの場合も、例えば $r=60\text{km}$ 地点での U_z 比はやはり 0.916 となる。なお、これらの相似則が成立することを確認するために上記 2 種の FE モデルを作成した際、モデル各部のメッシュサイズは忠実に元の 150km モデル

Table 1 U_z ratio and U_r ratio at some points on various FE models when R and H are changed from 1.2D to 100D.

R and H	U_z ratio				U_r ratio			
	$r=0$	$r=D$	$r=2D$	$r=3D$	$r=0.7071D$	$r=D$	$r=2D$	$r=3D$
1.2D	1.6398	0.7397	-	-	1.1467	0.7175	-	-
1.3D	1.4529	0.9089	-	-	1.0690	0.7948	-	-
1.4D	1.3196	0.9901	-	-	1.0081	0.8194	-	-
1.5D	1.2278	1.0272	-	-	0.9688	0.8293	-	-
2D	1.0418	1.0093	0	-	0.9234	0.8639	0	-
2.5D	0.9979	0.9694	0.6967	-	0.9396	0.9028	0.5364	-
3D	0.9855	0.9536	0.7995	0	0.9564	0.9317	0.7080	0
3.5D	0.9830	0.9497	0.8231	0.5643	0.9686	0.9509	0.8000	0.4022
4D	0.9833	0.9513	0.8353	0.6497	0.9769	0.9639	0.8562	0.5852
4.5D	0.9846	0.9548	0.8470	0.6748	0.9826	0.9727	0.8929	0.6966
5D	0.9861	0.9588	0.8589	0.6908	0.9866	0.9788	0.9179	0.7704
6D	0.9891	0.9663	0.8816	0.7243	0.9916	0.9865	0.9484	0.8582
7D	0.9914	0.9724	0.9011	0.7598	0.9943	0.9908	0.9652	0.9059
8D	0.9932	0.9772	0.9168	0.7924	0.9961	0.9934	0.9751	0.9339
9D	0.9946	0.9809	0.9295	0.8205	0.9972	0.9951	0.9815	0.9516
10D	0.9957	0.9837	0.9394	0.8442	0.9979	0.9962	0.9857	0.9633
11D	0.9965	0.9859	0.9476	0.8643	0.9984	0.9969	0.9885	0.9714
12D	0.9972	0.9878	0.9543	0.8805	0.9987	0.9975	0.9906	0.9772
13D	0.9977	0.9893	0.9596	0.8944	0.9990	0.9979	0.9921	0.9813
14D	0.9982	0.9905	0.9639	0.9056	0.9993	0.9982	0.9932	0.9843
15D	0.9986	0.9916	0.9677	0.9156	0.9995	0.9985	0.9941	0.9867
16D	0.9991	0.9926	0.9704	0.9230	0.9998	0.9989	0.9948	0.9884
17D	0.9995	0.9934	0.9731	0.9303	0.9999	0.9991	0.9952	0.9897
18D	0.9997	0.9940	0.9753	0.9363	1.0000	0.9992	0.9956	0.9908
19D	1.0001	0.9948	0.9767	0.9402	1.0003	0.9995	0.9961	0.9914
20D	1.0004	0.9952	0.9784	0.9450	1.0004	0.9996	0.9963	0.9922
30D	1.0012	0.9976	0.9879	0.9711	1.0006	0.9999	0.9975	0.9956
40D	1.0016	0.9985	0.9914	0.9809	1.0006	1.0000	0.9978	0.9964
50D	1.0017	0.9990	0.9931	0.9857	1.0006	1.0000	0.9979	0.9967
60D	1.0018	0.9992	0.9940	0.9883	1.0006	1.0000	0.9979	0.9969
70D	1.0019	0.9993	0.9946	0.9899	1.0006	1.0000	0.9980	0.9969
80D	1.0019	0.9994	0.9950	0.9910	1.0007	1.0000	0.9980	0.9970
90D	1.0019	0.9995	0.9953	0.9917	1.0007	1.0000	0.9980	0.9970
100D	1.0019	0.9995	0.9954	0.9921	1.0007	1.0000	0.9980	0.9970

の 1/2 (75km モデルの場合) あるいは 2 倍 (300km モデルの場合) とした。

このように FE モデルでは相似則が成り立つことから、 $D=10\text{km}$ の球圧力源に関して解析を行った第 3 節の結果を、 D が 10km 以外の場合にも一般化することが可能である。そこで、Fig.8-1 および Fig.8-2 に示した全 34 例の FE モデルの解析結果を、 R および H をある大きさ (D に対する相対値) に設定した場合の、モデル上の幾つかの地点 (D に対する相対値) での U_z 比および U_r 比として Table1 にまとめた。なお、先述のように、FEM では同じソフトウェア上の同じモデルでもメッシングが異なれば解析結果に 0.2~0.3% 程度の違いが生じることがあり、ここに示した値は必ずしも絶対的な値ではないが、これらは先にも記したようにメッシングに統一性を持たせた各モデルの解析結果による値であり、モデル領域の大きさが火山性地殻変動の計算精度に与える影響を、メッシングの違いの影響を受けることなく端的に表していると考えられる。このことから、Table1 では計算精度の値を小数点以下 4 桁で示し、モデル領域を大きくした場合に計算精度が向上していく様子をより詳しく見られるようにした。

FEM で火山性地殻変動の計算を行う場合には、Table1 を参考にして、圧力源からどの程度の距離範囲でどの程度の計算精度を必要とするかに応じてモデル領域の大きさを設定すれば良い。しかしながら、前にも述べたように、モデル領域を大きくするほど確かに計算精度は向上するが、メッシングが次第に困難となると共に節点数が増大し、それに伴って計算時間も加速度的に増大するため、必要とされる計算精度が確保される範囲内であるべく小さなモデル領域を設定するのが有利である。一定の計算精度を有し、しかもメッシングが比較的容易であり、計算時間も比較的短くて済むモデル領域として、 R および H が D の 15~20 倍程度のモデル領域が最も適当であると我々は考える。その程度の大きさのモデル領域を設定して解析を行い、その中心部 ($r=3D$ 程度まで) の解析結果を用いることにより、通常の火山性地殻変動解析にとっては十分な精度の解析結果が、比較的少ないメッシング労力および計算時間によって得られるであろう。

なお、Table1 の値に対してスプライン関数などを適用することにより、ある大きさのモデルの任意の水平距離 r の地点での計算精度を知ることなども可能であろう。

5. モデル外周面の境界条件が計算精度に及ぼす影響

これまで解析した各 FE モデルの外周面に対する境界条件は、いずれもモデル底面と同様に完全固定 (上下方向、水平方向の変位をいずれもゼロに拘束) とした。この境界条件は、地殻変動解析でしばしば適用される「充分遠方の地点は変位しない」という考え方に合致することから、観測値や解析解との比較において扱いやすい利点を持ち、また、拘束条件が最も多く、

一般に解を最も安定的に求めやすいことから、これまでの先行研究でもよく用いられている境界条件である。この境界条件をここでは「境界条件①」と呼ぶことにする。

一方、モデル外周面に対して、例えば以下の 3 通りの境界条件を課すこともできる：

- ② 全方向に自由
- ③ 水平方向にのみ自由 (上下方向の変位をゼロに拘束)
- ④ 上下方向にのみ自由 (水平方向の変位をゼロに拘束)

これらの 3 境界条件を境界条件①と比較し、どの境界条件が最も優れているか検討するため、先述の 30km モデルから 150km モデルまでの各モデルに対し、底面は完全固定とした上で、外周面に上記②~④の境界条件を与えて解析を行った。なお、各モデルに①~④の境界条件を課した場合の計算時間はほぼ同じであり、特に目立った差は認められなかった。

解析結果の例として、50km モデルおよび 150km モデルの外周面に①~④の境界条件を与えた場合の U_z 比と U_r 比の比較を Fig.10-1 および Fig.10-2 に示す。なお、両図では縦軸のスケールが大きく異なることに注意されたい。

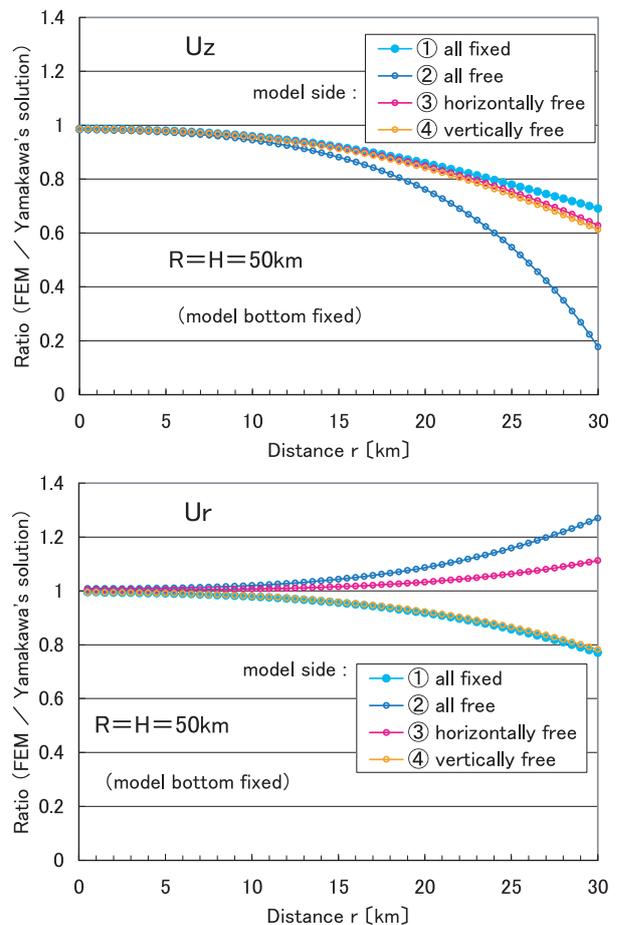


Fig. 10-1 U_z and U_r ratios when four different types of boundary conditions are set at the side surface of the “50km model” ($R=H=50\text{km}$). The bottom surface of the FE model is completely fixed.

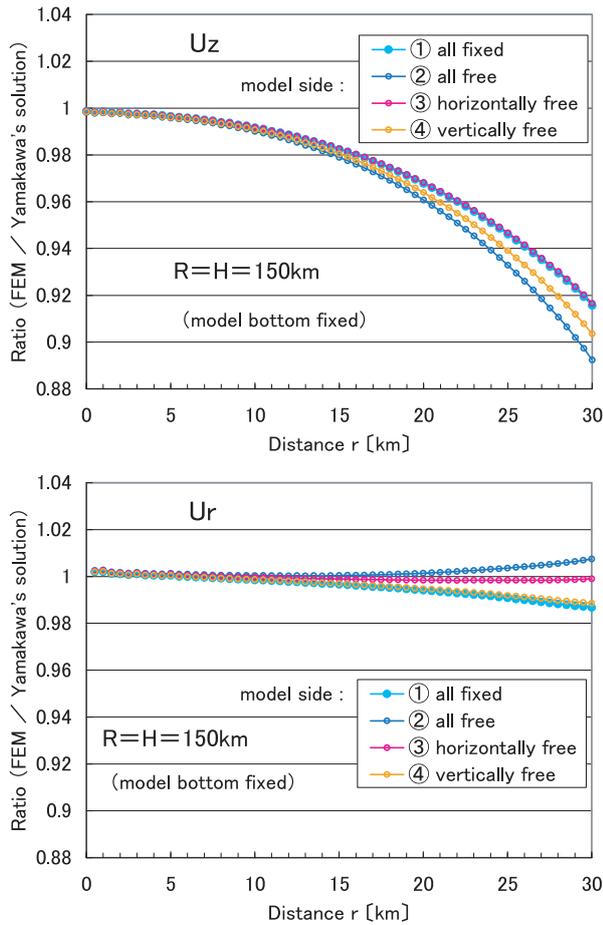


Fig. 10-2 U_z and U_r ratios when four different types of boundary conditions are set at the side surface of the “150km model” ($R=H=150\text{km}$). The bottom surface of the FE model is completely fixed. Individual results do not differ as much as in the “50km model”.

いずれの比も r が大きくなるに従って 1 から離れていく傾向にあるが、50km モデルでは、 U_z 比については境界条件①（完全固定）が最も遠方まで 1 に近い値を保っており、 U_r 比については境界条件③（水平方向にのみ自由）が最も 1 に近い。次に、150km モデルでは、50km モデルの場合に比べると 4 境界条件間の差は非常に小さいが、まず U_r 比については 50km モデル同様、境界条件③が最も良い。一方、 U_z 比については、境界条件①よりも境界条件③の方が僅かながら最も 1 に近くなっている。他のモデルについても U_z 比を見ても、100km 以下の各モデルでは境界条件①の方が 1 に近いが、110km 以上の各モデルでは境界条件③の方が 1 に近くなっている。

このように、4つの境界条件の中では、境界条件①および③が他の条件に比べて優れている。

次に、 r の増加に伴う U_z 比と U_r 比の変化の様子に注目する。Fig.10-1 および Fig.10-2 より、境界条件①は、 r の増加に伴う U_z 比と U_r 比の変化の様子が同一センスである（ r の増加につれて徐々に減少する）という特長を有していることが分かる。これは $U_{z(FEM)}$ と $U_{r(FEM)}$ の両者を同時に（ベクトルの的に）扱う場合に有利な性質である。なぜなら、山川の解においては、地表面上の

任意の地点は球圧力源中心とその地点とを結ぶ延長線上に変位し（(3)式および Fig.1 参照）、これは地表面上の点の変位から球圧力源の存在位置を推定する際に極めて有用な関係であるが、同様の関係が $U_{z(FEM)}$ と $U_{r(FEM)}$ についてもできるだけ精度良く成り立つことが望ましいからである。

50km モデルおよび 150km モデルに 4 境界条件を課した場合について、 $U_{z(FEM)} / U_{r(FEM)}$ と D/r との比を取った結果を Fig.10-3 に示す。4 境界条件とも r が大きくなるにつれてこの比は 1 付近から次第に離れていくが、その中では境界条件①の離れ方が最も緩やかであり、 r の変化に対して $U_{z(FEM)} / U_{r(FEM)}$ が最もよく再現されていることを示している。

以上のことから、我々は火山性地殻変動の計算においてこの境界条件①が最も適当な境界条件であると判断し、前節までの各 FE モデルの外周面を底面と共に完全固定して解析を実行した。

境界条件①はまた、 U_r に比べると総じて劣る U_z の計算精度が上記のように 100km モデルまでは最も良いという特長も持ち、比較的小規模なモデル領域しか設定できない場合には有利である。実地形を FE モデルに導入する際に、入手可能な地形データの範囲が限られて

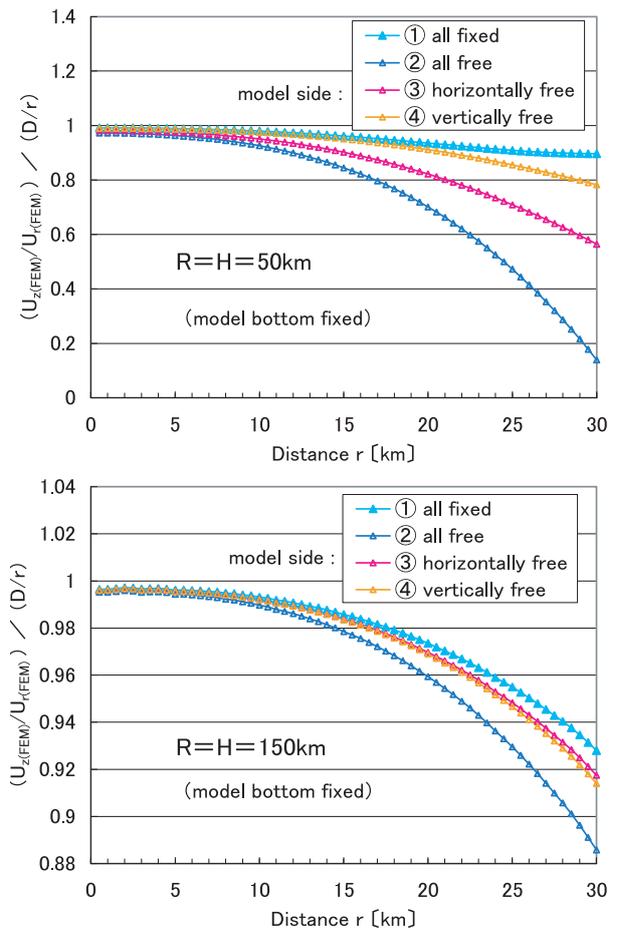


Fig. 10-3 Ratio of “ U_z ratio” to “ U_r ratio” for four boundary conditions. Boundary condition ① (all fixed) is nearest to 1 among the four conditions, indicating that the changes of the U_z and U_r ratios are the most similar among the four conditions.

いる場合などにはそのような状況も発生し得よう。

一方、境界条件③については、特に U_r の計算精度に関して、モデル領域の大きさにかかわらず最も優れている。境界条件①に比べれば拘束条件が少ないため、ソフトウェアやモデル領域の大きさ、メッシングによっては解が不安定になる可能性もあるかもしれないが、解が安定的に求められるならば、 U_r に関して非常に高い計算精度を必要とする場合（特に、モデル領域を比較的小規模にしか設定できない場合）にはこの境界条件を用いるのが良いであろう。

なお、Fig.10-1 と Fig.10-2 との比較から分かる通り、 R および H が大きくなるほど境界条件の違いによる解析結果の差異は徐々に小さくなっていく。これは、モデル領域が大きくなりモデル外周面までの距離が大きくなるほど、そこに与えられる境界条件がモデル中心部の変位に及ぼす影響が小さくなるためと考えられる。

6. モデル領域の R と H が等しくない場合の計算精度

前節までの議論では、円柱形のモデル領域の半径 R と高さ H を等しく設定したが、最後に、 R と H のそれぞれが計算精度にどのような影響を及ぼしているかについて考察するため、 R と H が等しくない場合についても FE モデルを作成して解析を行う。

以下では、球圧力源は $D=10\text{km}$ 、 $a=1\text{km}$ とし、 R あるいは H のいずれかを 150km （先述のように、 $R=H$ の場合には一定の計算精度を有するモデル領域の大きさ）に固定した上で、もう一方を 12km から 150km まで次第に変化させる。モデル底面および外周面は完全固定とする。なお、前節までの R と H が等しい FE モデルを、本節では「 $R=H$ モデル」と呼ぶ。

6.1 H を 150km に固定して R を変化させた場合

まず、 H を 150km に固定し、 R を 12km から 150km まで変化させた各モデルについて、モデル上の幾つかの地点での U_z 比と U_r 比を Fig.11 に示す。横軸には R を取っている。また、Fig.11 中には、Fig.8-1 に示した $R=H$ モデルの解析結果の一部も重ねて示す（灰色のマ

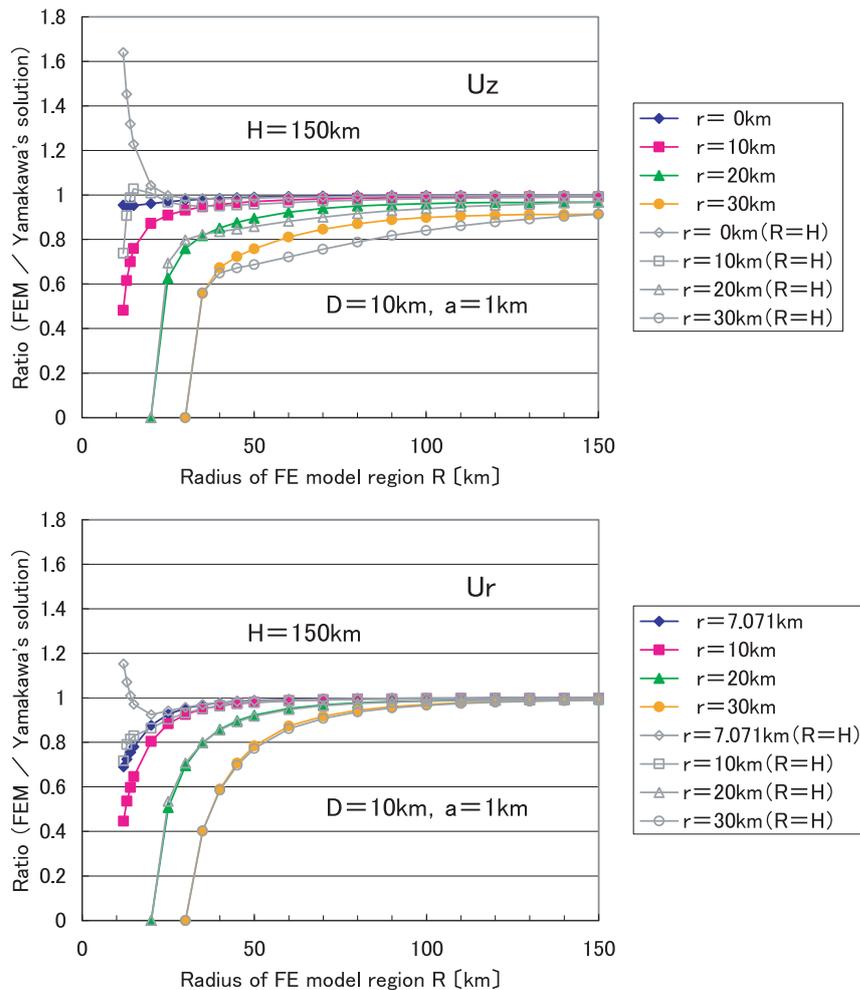


Fig. 11 U_z and U_r ratios at some points when H is fixed at 150km and R is changed from 12km to 150km ($D=10\text{km}$, $a=1\text{km}$). Those in case of $R=H$ are also indicated on the graph.

一カー)。例えば、横軸 R が 50km の所では、 $R=50\text{km}$ 、 $H=150\text{km}$ の縦長の円柱モデルの計算精度と、 $R=H=50\text{km}$ モデルの計算精度とを比較していることになる。モデル領域の外周面の変位を完全固定しているため、 $R=H$ モデルの場合と同様、 $R=20\text{km}$ のモデルでは 20km 地点での比が 0 に、また $R=30\text{km}$ のモデルでは 30km 地点での比が 0 になっている。

U_z 比について見ると、 $r=0\text{km}$ (球圧力源直上) での U_z 比は R が小さいモデルでも 1 に近く、最も小さい $R=12\text{km}$ の場合でも U_z 比は 0.954 である。従って、圧力源直上での U_z は、 R の大きさの影響をあまり受けまいと言える。また、 R が 40km 以上のモデルの $r=20\text{km}$ および 30km 地点で、 R が大きくなるにつれての 1 への収束が $R=H$ モデルの場合よりもやや早い傾向が見られる。

一方、 U_r 比について見ると、 R が小さい場合は $r=7.071\text{km}$ および 10km 地点での値が $R=H$ モデルと大きく異なるものの、 R が約 30km 以上になると、どの地点でも $R=H$ モデルとほぼ同じ値を取りつつ 1 へと収束していく。

6.2 R を 150km に固定して H を変化させた場合

次に、 R を 150km に固定し、 H を 12km から 150km まで次第に変化させた各モデルについて、解析結果のまとめを Fig.12 に示す。横軸には H を取っている。また、ここでも $R=H$ モデルの解析結果 (Fig.8-1) を重ねて示す。例えば、横軸 H が 50km の所では、 $H=50\text{km}$ 、 $R=150\text{km}$ の平たい円柱モデルの計算精度と、 $R=H=50\text{km}$ モデルの計算精度とを比較していることになる。

$R=H$ モデルの場合は、モデル外周面完全固定の境界条件により、20km モデルでは $r=20\text{km}$ 地点での変位が 0 に、また、30km モデルでは 30km 地点での変位が 0 になるが、ここで解析した各モデルは R がいずれも 150km と充分大きいいため、最も H の小さい $H=12\text{km}$ のモデルの場合でも $r=20\text{km}$ および 30km 地点の地表面が変位することが可能である。そのため、Fig.11 の場合とは対照的に、 H がおよそ 50km 以下のモデルでの $r=20\text{km}$ および 30km 地点で $R=H$ モデルとの差が目立つ。

まず、 U_r 比について見ると、特に $r=20\text{km}$ および 30km 地点において、1 への収束が $R=H$ モデルに比べ

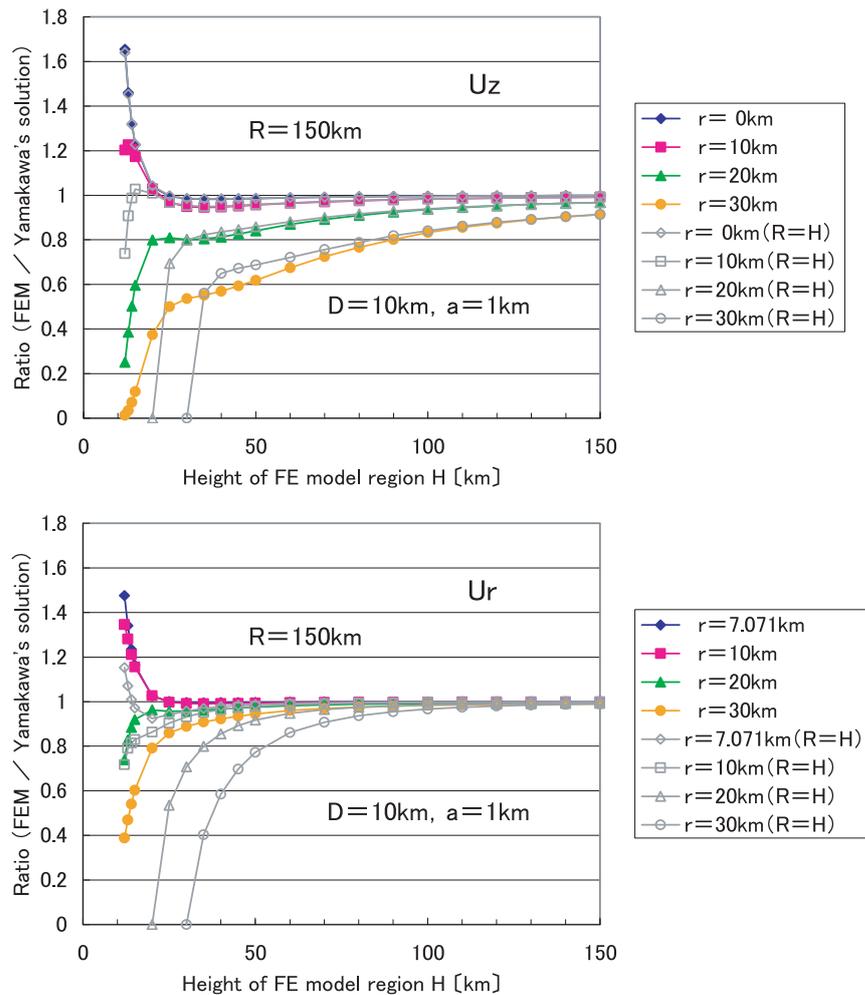


Fig. 12 U_z and U_r ratios at some points when R is fixed at 150km and H is changed from 12km to 150km ($D=10\text{km}$, $a=1\text{km}$). Those in case of $R=H$ are also indicated on the graph.

でずっと早い。これは、上述のように、 H が小さいモデルでも $r=20\text{km}$ および 30km 地点の地表面が変位することが可能なためである。

一方、 U_z 比について見ると、 H が小さいうちは上述の理由により $R=H$ モデルとの間に差が見られるものの、 H が 50km 以上での U_z 比の 1 への収束の様子は $R=H$ モデルの場合とほぼ同じである。

6.3 R と H のそれぞれが U_z と U_r の計算精度に与える影響

以上の結果をまとめると、 H を充分大きな値に固定して R を次第に大きくした場合には、 U_z 比の 1 への収束は $R=H$ モデルの場合より早くなるが、 U_r 比の 1 への収束の様子は $R=H$ モデルとほぼ同じである。一方、 R を充分大きな値に固定して H を次第に大きくした場合には、 U_r 比の 1 への収束は $R=H$ モデルの場合より早くなるが、 U_z 比の 1 への収束の様子は $R=H$ モデルとほぼ同じである。

従って、 U_z の計算精度は主に H の大きさによって、また、 U_r の計算精度は主に R の大きさによって決定されていると言える。

このことから、例えば U_r についてのみ計算精度の高い FE 解析結果が必要な場合に、 R だけを充分な大きさにし、 H は節点数を少なくするために極力小さくするなどという設定も考えられない訳ではない。しかしながら、今回扱ったのは地表面平面かつ均質の場合のみであり、今後 FE モデルに実際の火山地形や速度構造を導入する場合、 H が充分な大きさでないことが U_r の計算精度にどのような影響を及ぼすかは不明である。特に、深部にまで及ぶ層構造を導入する場合などは、 H が小さいことが U_r の計算精度に大きな影響を及ぼす可能性も考えられる。FE モデル作成の際にはやはり、 R 、 H とも D に対して充分な大きさに設定してモデル底面および外周面の影響をできるだけ排除し、 U_z 、 U_r とも充分な計算精度を確保することが望ましいと考えられる。

その一方、 R および H のそれぞれが D に対して充分な大きさ（概ね D の 10 倍以上）を有していれば、必ずしも R と H を等しく設定しなくとも良いであろう。例えば、Fig.11 の U_z 比の図からも分かるように、 H を R より大きく設定すると、 20km および 30km 地点での U_z の計算精度を $R=H$ モデルより改善できる場合がある（ただし、 H と R をどのように設定しても、同地点での U_r の計算精度には及ばない）。あるいは、入手可能な地形データや速度構造データの範囲が限られているなどの理由で R と H を等しく設定することができない場合でも、 R と H のそれぞれが D に対して充分な大きさを有していれば、充分な計算精度が得られるはずである。あるモデル領域の計算精度を詳しく知りたい場合には、本稿で扱ったように、深さに対して充分小さな球圧力源をそのモデル領域（地表面平面、均質）の中心に置いて FE 解析を行い、山川の解との比較を行えば良い。

7. まとめ

FEM を用いて火山性地殻変動を計算する際に、モデル領域の大きさや境界条件が計算精度に及ぼす影響について定量的に評価するため、茂木-山川モデルを FE モデルで再現し、山川（1955）の解析解との比較を行った。中心深さ D に対して半径 a が充分小さい球圧力源の周囲に円柱形のモデル領域を設定し、その大きさや境界条件を様々に変えて FE 解析を行った結果、以下のような知見が得られた。

1) モデル領域を水平方向にも深さ方向にも大きくするほど、FE 解析結果は山川の解に近付き、計算精度が高くなることが確かめられた。

2) しかしながら、モデル領域を大きくするほど一般に節点数が多くなり、計算時間が加速度的に増大することから、必要な計算精度が確保される範囲内なるべく小さなモデル領域を設定するのが良い。具体的には、円柱モデル領域の半径および深さを $15D\sim 20D$ 程度に設定し、その中心部（距離 $r=3D$ 程度まで）の解析結果を用いるのが最も適当である。

3) モデル領域が充分大きければ、外周面の境界条件を変えても解析結果にそれほどの違いは生じないが、計算精度の距離変化のセンスが上下変位と水平変位で同じになることなどから、外周面完全固定の境界条件が最も良いと考えられる。

4) 上下変位の計算精度は主にモデル領域の深さ方向の大きさによって、また、水平変位の計算精度は主にモデル領域の水平方向の大きさによって決定される。

なお、本稿では、FE モデルの剛性率 μ の値として上部地殻の標準的な値 40GPa を用いたが、標準的な上部地殻に比べて一般に地震波速度が遅い火山の山体の剛性率はこれより低い値であると考えられることに注意が必要である。剛性率を低くした場合、変位量は剛性率に反比例して増大する。

謝辞

気象研究所地震火山研究部の伊藤秀美部長（現沖縄気象台長）からは本稿の執筆に際して終始お励ましを頂き、また原稿に対して貴重なご意見を頂きました。厚くお礼申し上げます。同研究部の山里 平室長および北川貞之氏（現気象庁）には原稿を丁寧に読んで頂き、適切なコメントを頂きました。2名の匿名査読者および編集委員の山本剛靖氏からのご指摘は本稿の改善にとって非常に有益でした。以上の方々に深く感謝致します。本研究は気象研究所特別研究「火山活動評価手法の開発研究」（平成 13～17 年度）に関連して行なわれたものです。特別研究の実施に際してお世話頂きました関係諸官に謝意を表します。

参考文献

- 小柴正則, 1990: 光・波動のための有限要素法の基礎. 森北出版, 227pp.
- 三好俊郎・白鳥正樹・坂田信二, 1998: 有限要素法解析. 朝倉書店, 147pp.
- 茂木清夫, 1957: 桜島の噴火と周辺の地殻変動との関係. *火山*, **1**, 9-18.
- 西 潔, 1997: 構造探査データを用いた霧島火山体浅部の3D速度構造. *火山*, **42**, 165-170.
- 大中康譽・松浦充宏, 2002: 地震発生の物理学. 東京大学出版会, 378pp.
- 鷺津久一郎・宮本 博・山田嘉昭・山本善之・川井忠彦共編, 1983: 有限要素法ハンドブック II 応用編. 培風館, 1109pp.
- 山川宜男, 1955: 内部力源による半無限弾性体の変形について. *地震*, **8**, 84-98.
- 山本圭吾・井田喜明, 1994: やや遠地地震を用いた霧島火山群の3次元P波速度構造解析. *東京大学地震研究所彙報*, **69**, 267-289.
- Bianchi, R., Coradini, A., Federico, C., Giberti, G., Sartoris, G. and Scandone, R., 1984: Modeling of surface ground deformations in the Phlegraean Fields volcanic area, Italy. *Bulletin Volcanologique*, **47-2**, 321-330.
- Bonaccorso, A. and Davis, P. M., 1999: Models of ground deformation from vertical volcanic conduits with application to eruptions of Mount St. Helens and Mount Etna. *J. Geophys. Res.*, **104-B5**, 10531-10542.
- Dieterich, J. H. and Decker, R. W., 1975: Finite element modeling of surface deformation associated with volcanism. *J. Geophys. Res.*, **80-29**, 4094-4102.
- Ohmi, S. and Lees, J.M., 1995: Three-dimensional P- and S-wave velocity structure below Unzen volcano. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, **65**, 1-26.
- Trasatti, E., Giunchi, C. and Bonafede, M., 2003: Effects of topography and rheological layering on ground deformation in volcanic regions. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, **122**, 89-110.
- Yamawaki, T., Tanaka, S., Ueki, S., Hamaguchi, H., Nakamichi, H., Nishimura, T., Oikawa, J., Tsutsui, T., Nishi, K., Shimizu, H., Yamaguchi, S., Miyamachi, H., Yamasato, H. and Hayashi, Y., 2004: Three-dimensional P-wave velocity structure of Bandai volcano in northeastern Japan inferred from active seismic survey. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, **138**, 267-282.
- Yang, X. M. and Davis, P. M., 1988: Deformation from inflation of a dipping finite prolate spheroid in an elastic half-space as a model for volcanic stressing. *J. Geophys. Res.*, **93-B5**, 4249-4257.

有限要素法による火山性地殻変動の計算精度の確立

—茂木-山川モデルの再現—

坂井孝行 (気象研究所地震火山研究部)・山本哲也* (気象庁)
 福井敬一 (気象研究所地震火山研究部)・藤原健治 (気象庁)
 高木朗充 (気象研究所地震火山研究部)・中禮正明* (新潟地方気象台)

火山における地殻変動を解釈する場合、半無限均質弾性体内の充分小さな球圧力源による地表面変位を表す山川 (1955) による解析解など、非常に単純化された状況から導出された解析解が用いられている。しかしながら、現実の火山においては、地表面上に突出する火山地形の存在や、球形以外の圧力源形状、あるいは不均質な地下構造などのため、そのような解析解は厳密には成り立たない。そこで我々は、現実の火山における地殻変動の様子をより詳しく知るため、有限要素法 (FEM) を用いて数値モデルを作成し、計算を進めている。その際、モデル領域の大きさや境界条件の設定などが火山性地殻変動の計算精度に影響を及ぼすことが予想される。そこで、本研究では、茂木-山川モデルを FE モデルで再現し、モデル領域の大きさや境界条件が火山性地殻変動の計算精度に及ぼす影響について定量的に評価した。その結果、以下のような知見が得られた。モデル領域を大きくするほど、FE 解析結果は山川の解に近付き、火山性地殻変動の計算精度を高めることができる。しかしながら、モデル領域を大きくするほど一般に節点数が多くなり、計算時間が加速度的に増大することから、必要な計算精度が確保される範囲内であるべく小さなモデル領域を設定するのが良い。境界条件については、計算精度の距離変化の様子が上下変位と水平変位で最も類似することから、モデル領域の底面と外周面を完全固定するのが最も良いと考えられる。モデル領域の深さ方向の大きさは上下変位の計算精度に、また、モデル領域の水平方向の大きさは水平変位の計算精度に大きな影響を及ぼす。

* 現所属：地磁気観測所