

## 付録B 高精度移流スキーム

トレーサのMRI.COMでは移流スキームとして、標準ではQUICKというスキームを用いているが、鉛直方向のトレーサのスキームとして更に高精度のQUICKESTというスキームを使うことができる。水平方向には、QUICKESTの2次元拡張版のUTOPIAを用いることができる。更に非現実な極値があらわれないようなオプションを加えて(その場合のoptionはUTOPIA QUICKEST ULTIMATEとなる。)使用することもできる。

### B.1 鉛直移流スキーム QUICKEST

MRI.COMでは、鉛直のグリッド配置が、トレーサ点とトレーサ点との中点に流速点があるという点で、COCO(東京大学気候システム研究センターの海洋モデル)と異なっている。そのため鉛直移流に対してQUICKESTを適用する場合にCOCOの表式から若干の変更を要する。以下では、MRI.COMの場合のQUICKESTの差分表現と精度について簡単に述べる。

非圧縮の1次元移流方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uT) = 0 \quad (\text{B.1})$$

を考える。非圧縮なので $u$ は一様である。実際には3次元流体に適用するので流速は一様ではないが、一貫性を保つため(というより簡単のため)一様として議論を進める。

トレーサ点の格子幅を $\Delta x_i$ 、その両隣の流速点の格子幅を $\Delta x_{i-\frac{1}{2}}$ 、 $\Delta x_{i+\frac{1}{2}}$ とすると、MRI.COMでは、

$$\Delta x_i = \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{2} \quad (\text{B.2})$$

となっている。

QUICKESTでは、フラックスを計算するために必要な格子境界のトレーサの値を2次の補間によって求め、さらに移流によるトレーサの時間変化を考慮して、時間ステップの間の平均値を求める。まず2次の補間の係数を求める。

$T$ を $x_{i-\frac{1}{2}}$ のまわりでTaylor展開すると、 $x = x_{i+1}, x_i, x_{i-1}, x_{i-2}$ についてそれぞれ、

$$T_{i+1} = c_0 + c_1 \left( \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{2} + \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \right) + c_2 \left( \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{2} + \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \right)^2 + O(\Delta x^3) \quad (\text{B.3})$$

$$T_i = c_0 + c_1 \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{2} + c_2 \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}^2}{4} + O(\Delta x^3) \quad (\text{B.4})$$

$$T_{i-1} = c_0 - c_1 \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{2} + c_2 \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}^2}{4} + O(\Delta x^3) \quad (\text{B.5})$$

$$T_{i-2} = c_0 - c_1 \left( \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{2} + \Delta x_{i-\frac{3}{2}} \right) + c_2 \left( \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{2} + \Delta x_{i-\frac{3}{2}} \right)^2 + O(\Delta x^3) \quad (\text{B.6})$$

と書ける。これらを $c_n$ について解けば補間の係数が求まる。その際、 $u$ の向きに応じて、より上流の3式を使う。即ち、 $u > 0$ のときは(B.4), (B.5), (B.6)を用い、 $u < 0$ のときは(B.3), (B.4), (B.5)を用いる。解は

付録 B 高精度移流スキーム

以下のようになる。

$$c_0 = \frac{T_i + T_{i-1}}{2} - \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}^2}{4} c_2 \quad (\text{B.7})$$

$$c_1 = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \quad (\text{B.8})$$

$$c_2 = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta x_i} \left( \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{T_{i-1} - T_{i-2}}{\Delta x_{i-\frac{3}{2}}} \right) & (u > 0) \\ \frac{1}{2\Delta x_i} \left( \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right) & (u < 0) \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

つぎに、(B.1) の両辺を 1 時間ステップおよび 1 空間格子に亘って積分する。

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} dt \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} dx \frac{\partial T}{\partial t} = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} dt \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} dx \frac{\partial}{\partial x} (uT) \quad (\text{B.10})$$

(B.10) の右辺は

$$- \int_{t^n}^{t^{n+1}} dt (u_r T_r - u_l T_l) \quad (\text{B.11})$$

と書ける (添字  $r$  は  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ 、 $l$  は  $x = x_{i-\frac{1}{2}}$  を示す)。  $u$  の時間変化はないとすると、

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} dt T_l = \int_{-u_l \Delta t}^0 [c_0^n + c_1^n \xi + c_2^n \xi^2 + O(\Delta x^3)] \frac{d\xi}{u_l} \quad (\text{B.12})$$

であるから、(B.11) は

$$-\Delta t (u_r \overline{T_r^n} - u_l \overline{T_l^n}) + O(\Delta x^3 u \Delta t) \quad (\text{B.13})$$

となる。ここに、

$$\begin{aligned} \overline{T_l^n} &= \frac{1}{u_l \Delta t} \int_{-u_l \Delta t}^0 (c_0^n + c_1^n \xi + c_2^n \xi^2) d\xi \\ &= c_0^n - \frac{c_1^n}{2} u_l \Delta t + \frac{c_2^n}{3} u_l^2 \Delta t^2 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

である。

一方、(B.10) の左辺は、 $T$  の Taylor 展開の 2 次の項までとり、(B.2) の関係を用いると、

$$\Delta x_i \left[ T_i^{n+1} - T_i^n + \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}} - \Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{4} (T_{xi}^{n+1} - T_{xi}^n) + \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}^2 - \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i-\frac{1}{2}}^2}{24} (T_{xxi}^{n+1} - T_{xxi}^n) + O(\Delta x^3) \right] \quad (\text{B.15})$$

と書ける。また、

$$\begin{aligned} T_{xi}^{n+1} - T_{xi}^n &= \Delta t \left. \frac{\partial T_x}{\partial t} \right|_i^n + O(\Delta t^2) \\ &= -\Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (uT) \right]_i^n + O(\Delta t^2) \\ &= -\Delta t \frac{\partial}{\partial x} (uT_x)_i^n + O(\Delta t^2) \\ &= -\Delta t \left\{ \frac{u_r T_{xr}^n - u_l T_{xl}^n}{\Delta x_i} \right\} + O(u \Delta t \Delta x) + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

と書け、同様に、

$$T_{xxi}^{n+1} - T_{xxi}^n = -\Delta t \left\{ \frac{u_r T_{xxr}^n - u_l T_{xxl}^n}{\Delta x_i} \right\} + O(u \Delta t \Delta x) + O(\Delta t^2) \quad (\text{B.17})$$

と書ける。従って、(B.15) は

$$\Delta x_i \left[ T_i^{n+1} - T_i^n - \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}} - \Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{4\Delta x_i} \Delta t (u_r T_{xr}^n - u_l T_{xl}^n) - \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}^2 - \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i-\frac{1}{2}}^2}{24\Delta x_i} \Delta t (u_r T_{xxr}^n - u_l T_{xxl}^n) \right] + O(u\Delta t \Delta x^3) + O(\Delta x^3 \Delta t^2) \quad (\text{B.18})$$

(B.13) と (B.18) とから、予報式の差分表現は

$$T_i^{n+1} = T_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left[ u_r \bar{T}_r^n - u_l \bar{T}_l^n - \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}} - \Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{4} (u_r T_{xr}^n - u_l T_{xl}^n) - \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}^2 - \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i-\frac{1}{2}}^2}{24} (u_r T_{xxr}^n - u_l T_{xxl}^n) \right] + O(\alpha \Delta x^3) + O(\Delta x^2 \Delta t^2) \quad (\text{B.19})$$

となる。ここに、

$$\alpha \equiv \frac{u\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (\text{B.20})$$

$$T_{xl}^n = c_1 + O(\Delta x^2) \quad (\text{B.21})$$

$$T_{xxl}^n = 2c_2 + O(\Delta x) \quad (\text{B.22})$$

であるから、(B.19) の表現は  $\max(O(\Delta x^3), O(\Delta x^2 \Delta t^2))$  の精度を持つ。

## B.2 水平移流スキーム UTOPIA

UTOPIA は QUICKEST を多次元に拡張した移流スキームである。MRI.COM への導入に際しては、COCO (CCSR Ocean Component Model) と同様に、水平二次元にのみ適用し、鉛直方向については独立に QUICKEST を適用する。

MRI.COM は最終的には南北・東西ともに不等間隔格子を使えるようにするので、ここでは、南北・東西ともに不等間隔格子の場合の UTOPIA の表現を求める。トレーサ点は 4 個の流速点を頂点とする長方形の中央に位置する、つまり、流速格子の境界線がトレーサ格子を四等分するものとする。

いま、

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h_\mu h_\psi} \frac{\partial}{\partial \mu} (h_\psi u T) + \frac{1}{h_\mu h_\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (h_\mu v T) = 0 \quad (\text{B.23})$$

という移流方程式を考える。この両辺を 1 時間ステップ、1 格子にわたって積分する。

$$\int_{\psi_L - \Delta\psi_L/2}^{\psi_L + \Delta\psi_L/2} d\psi \int_{\mu_L - \Delta\mu_L/2}^{\mu_L + \Delta\mu_L/2} d\mu (\chi^{n+1} - \chi^n) = -\Delta t (u_r^n \bar{T}_r^n \Delta y_r - u_l^n \bar{T}_l^n \Delta y_l + v_u^n \bar{T}_u^n \Delta x_u - v_d^n \bar{T}_d^n \Delta x_d) \quad (\text{B.24})$$

ここに、 $\chi \equiv h_\mu h_\psi T$  である。ここで、右辺の  $\bar{T}_r^n$  などは格子境界のトレーサの値であるが、どのように計算するかは後述する。(B.24) の左辺は、 $\chi$  を二次補間した値を積分する。 $\chi$  の L (格子点のラベルは図 B.1 を参照のこと) の近傍での Taylor 展開を考える。

$$\chi = \chi_L + a_{10}(\mu - \mu_L) + a_{20}(\mu - \mu_L)^2 + a_{01}(\psi - \psi_L) + a_{02}(\psi - \psi_L)^2 + a_{11}(\mu - \mu_L)(\psi - \psi_L) \quad (\text{B.25})$$

付録 B 高精度移流スキーム

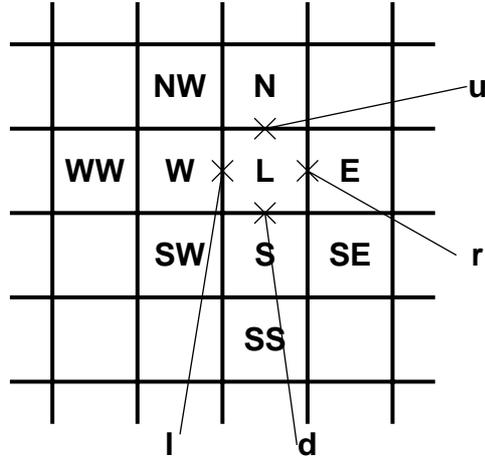


図 B.1: 格子点の配置

とすると、E, W, N, S 各点での値は、

$$\chi_E = \chi_L + a_{10}\Delta\mu_r + a_{20}\Delta\mu_r^2 \quad (\text{B.26})$$

$$\chi_W = \chi_L - a_{10}\Delta\mu_l + a_{20}\Delta\mu_l^2 \quad (\text{B.27})$$

$$\chi_N = \chi_L + a_{01}\Delta\psi_u + a_{02}\Delta\psi_u^2 \quad (\text{B.28})$$

$$\chi_S = \chi_L - a_{01}\Delta\psi_d + a_{02}\Delta\psi_d^2 \quad (\text{B.29})$$

と書ける。ここで、

$$\Delta\psi_u \equiv \frac{\Delta\psi_L + \Delta\psi_N}{2} \quad (\text{B.30})$$

$$\Delta\psi_d \equiv \frac{\Delta\psi_L + \Delta\psi_S}{2} \quad (\text{B.31})$$

$$\Delta\mu_r \equiv \frac{\Delta\mu_L + \Delta\mu_E}{2} \quad (\text{B.32})$$

$$\Delta\mu_l \equiv \frac{\Delta\mu_L + \Delta\mu_W}{2} \quad (\text{B.33})$$

とした。これらから、

$$a_{10} = \frac{\Delta\mu_l \frac{\chi_E - \chi_L}{\Delta\mu_r} + \Delta\mu_r \frac{\chi_L - \chi_W}{\Delta\mu_l}}{\Delta\mu_r + \Delta\mu_l} \quad (\text{B.34})$$

$$a_{20} = \frac{\frac{\chi_E - \chi_L}{\Delta\mu_r} - \frac{\chi_L - \chi_W}{\Delta\mu_l}}{\Delta\mu_r + \Delta\mu_l} \quad (\text{B.35})$$

$$a_{01} = \frac{\Delta\psi_d \frac{\chi_N - \chi_L}{\Delta\psi_u} + \Delta\psi_u \frac{\chi_L - \chi_S}{\Delta\psi_d}}{\Delta\psi_u + \Delta\psi_d} \quad (\text{B.36})$$

$$a_{02} = \frac{\frac{\chi_N - \chi_L}{\Delta\psi_u} - \frac{\chi_L - \chi_S}{\Delta\psi_d}}{\Delta\psi_u + \Delta\psi_d} \quad (\text{B.37})$$

を得る。(B.25) を (B.24) の左辺に代入すると、

$$\Delta\mu_L \Delta\psi_L \left[ \chi_L^{n+1} - \chi_L^n + \frac{\Delta\mu_L^2}{12} (a_{20}^{n+1} - a_{20}^n) + \frac{\Delta\psi_L^2}{12} (a_{02}^{n+1} - a_{02}^n) \right] \quad (\text{B.38})$$

となる。(B.23) を用いると、

$$a_{20}^{n+1} - a_{20}^n = -\Delta t \left[ \frac{h_{\psi r} u_r^n T_{\mu\mu r}^n - h_{\psi l} u_l^n T_{\mu\mu l}^n + h_{\mu u} v_u^n T_{\mu\mu u}^n - h_{\mu d} v_d^n T_{\mu\mu d}^n}{\Delta\mu_L} + \frac{\Delta\psi_L}{\Delta\psi_L} \right] \quad (\text{B.39})$$

$$a_{02}^{n+1} - a_{02}^n = -\Delta t \left[ \frac{h_{\psi r} u_r^n T_{\psi\psi r}^n - h_{\psi l} u_l^n T_{\psi\psi l}^n + h_{\mu u} v_u^n T_{\psi\psi u}^n - h_{\mu d} v_d^n T_{\psi\psi d}^n}{\Delta\mu_L} + \frac{\Delta\psi_L}{\Delta\psi_L} \right] \quad (\text{B.40})$$

と近似できる。 $T_{\mu\mu r}^n$  などは格子境界での 2 階微分であるが、差分表現は後述する  $c_{20}$  などと同様にする。以上より、適当な近似の下に、

$$T_L^{n+1} = T_L^n - \frac{\Delta t}{S_L} (u_r^n \tilde{T}_r^n \Delta y_r - u_l^n \tilde{T}_l^n \Delta y_l + v_u^n \tilde{T}_u^n \Delta x_u - v_d^n \tilde{T}_d^n \Delta x_d) \quad (\text{B.41})$$

と書ける。ここに、

$$\tilde{T}_l^n = \bar{T}_l^n - \frac{\Delta\mu_L^2}{24} T_{\mu\mu l}^n - \frac{\Delta\psi_L^2}{24} T_{\psi\psi l}^n \quad (\text{B.42})$$

$$\tilde{T}_d^n = \bar{T}_d^n - \frac{\Delta\mu_L^2}{24} T_{\mu\mu d}^n - \frac{\Delta\psi_L^2}{24} T_{\psi\psi d}^n \quad (\text{B.43})$$

である。

次に、 $\bar{T}_l^n, \bar{T}_d^n$  の表現を求める。 $\bar{T}_l^n$  としては、図 B.1 の 1 の近傍における二次補間を求め、図 B.2 の斜線の領域に亘って平均した値を用いる。 $\bar{T}_d^n$  についても同様である。

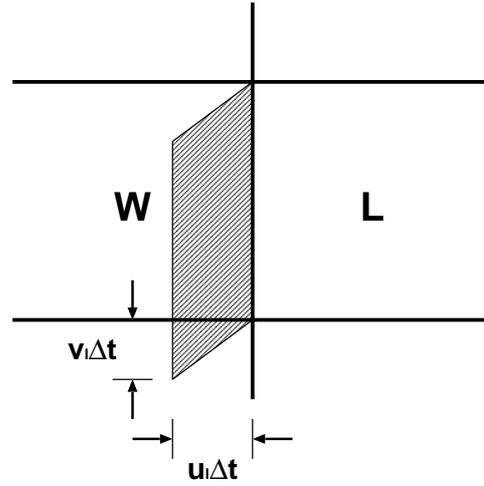


図 B.2: 格子境界のトレーサ値を見積るための平均に用いる領域

l および d の近傍での  $T^n$  の Taylor 展開をそれぞれ、

$$T^n = c_{00} + c_{10}(\mu - \mu_l) + c_{20}(\mu - \mu_l)^2 + c_{01}(\psi - \psi_L) + c_{02}(\psi - \psi_L)^2 + c_{11}(\mu - \mu_l)(\psi - \psi_L) \quad (\text{B.44})$$

$$T^n = d_{00} + d_{10}(\mu - \mu_l) + d_{20}(\mu - \mu_l)^2 + d_{01}(\psi - \psi_L) + d_{02}(\psi - \psi_L)^2 + d_{11}(\mu - \mu_l)(\psi - \psi_L) \quad (\text{B.45})$$

と書く。

付録 B 高精度移流スキーム

1 の周囲の 8 点での値を (B.44) を用いて書くと、

$$T_L^n = c_{00} + c_{10} \frac{\Delta\mu_L}{2} + c_{20} \frac{\Delta\mu_L^2}{4} \quad (\text{B.46})$$

$$T_W^n = c_{00} - c_{10} \frac{\Delta\mu_W}{2} + c_{20} \frac{\Delta\mu_W^2}{4} \quad (\text{B.47})$$

$$T_E^n = c_{00} + c_{10} \left( \Delta\mu_L + \frac{\Delta\mu_E}{2} \right) + c_{20} \left( \Delta\mu_L + \frac{\Delta\mu_E}{2} \right)^2 \quad (\text{B.48})$$

$$T_{WW}^n = c_{00} - c_{10} \left( \Delta\mu_W + \frac{\Delta\mu_{WW}}{2} \right) + c_{20} \left( \Delta\mu_W + \frac{\Delta\mu_{WW}}{2} \right)^2 \quad (\text{B.49})$$

$$T_N^n = T_L^n + c_{01} \Delta\psi_u + c_{02} \Delta\psi_u^2 + c_{11} \frac{\Delta\mu_L}{2} \Delta\psi_u \quad (\text{B.50})$$

$$T_S^n = T_L^n - c_{01} \Delta\psi_d + c_{02} \Delta\psi_d^2 - c_{11} \frac{\Delta\mu_L}{2} \Delta\psi_d \quad (\text{B.51})$$

$$T_{NW}^n = T_W^n + c_{01} \Delta\psi_u + c_{02} \Delta\psi_u^2 - c_{11} \frac{\Delta\mu_W}{2} \Delta\psi_u \quad (\text{B.52})$$

$$T_{SW}^n = T_W^n - c_{01} \Delta\psi_d + c_{02} \Delta\psi_d^2 + c_{11} \frac{\Delta\mu_W}{2} \Delta\psi_d \quad (\text{B.53})$$

となる。流速の方向によって、このうち 6 個を用いれば係数が全て求まる。即ち、

$$u_l^n > 0, v_l^n > 0 \Rightarrow L, W, WW, S, NW, SW \quad (\text{B.54})$$

$$u_l^n < 0, v_l^n > 0 \Rightarrow L, W, E, N, S, SW \quad (\text{B.55})$$

$$u_l^n > 0, v_l^n < 0 \Rightarrow L, W, WW, N, NW, SW \quad (\text{B.56})$$

$$u_l^n < 0, v_l^n < 0 \Rightarrow L, W, E, N, S, NW \quad (\text{B.57})$$

のようにする。

(B.46),(B.47) より、

$$c_{00} = \frac{\Delta\mu_W T_L^n + \Delta\mu_L T_W^n}{2\Delta\mu_l} - c_{20} \frac{\Delta\mu_L \Delta\mu_W}{4} \quad (\text{B.58})$$

$$c_{10} = \frac{T_L^n - T_W^n}{\Delta\mu_l} - c_{20} \frac{\Delta\mu_L - \Delta\mu_W}{2} \quad (\text{B.59})$$

である。

$u_l^n > 0$  のとき、(B.46),(B.49) より、

$$c_{20} = \frac{\frac{T_L^n - T_W^n}{\Delta\mu_l} - \frac{T_W^n - T_{WW}^n}{\Delta\mu_{ll}}}{\Delta\mu_l + \Delta\mu_{ll}} \quad (\text{B.60})$$

where  $\Delta\mu_{ll} \equiv \frac{\Delta\mu_W + \Delta\mu_{WW}}{2}$

(B.52),(B.53) より、

$$c_{02} = \frac{\frac{T_{NW}^n - T_W^n}{\Delta\psi_u} - \frac{T_W^n - T_{SW}^n}{\Delta\psi_d}}{\Delta\psi_u + \Delta\psi_d} \quad (\text{B.61})$$

となり、 $u_l^n < 0$  のとき、(B.47),(B.48) より、

$$c_{20} = \frac{\frac{T_E^n - T_L^n}{\Delta\mu_r} - \frac{T_L^n - T_W^n}{\Delta\mu_l}}{\Delta\mu_r + \Delta\mu_l} \quad (\text{B.62})$$

(B.50),(B.51) より、

$$c_{02} = \frac{\frac{T_N^n - T_L^n}{\Delta\psi_u} - \frac{T_L^n - T_S^n}{\Delta\psi_d}}{\Delta\psi_u + \Delta\psi_d} \quad (\text{B.63})$$

となる。

$v_l^n > 0$  のとき、(B.51),(B.53) より、

$$c_{01} = \frac{\Delta\mu_w(T_L^n - T_S^n) + \Delta\mu_L(T_W^n - T_{SW}^n)}{2\Delta\mu_l\Delta\psi_d} + c_{02}\Delta\psi_d \quad (\text{B.64})$$

$$c_{11} = \frac{T_{SW}^n - T_W^n - T_S^n + T_L^n}{\Delta\mu_l\Delta\psi_d} \quad (\text{B.65})$$

となり、 $v_l^n < 0$  のとき、(B.50),(B.52) より、

$$c_{01} = \frac{\Delta\mu_w(T_N^n - T_L^n) + \Delta\mu_L(T_{NW}^n - T_W^n)}{2\Delta\mu_l\Delta\psi_u} - c_{02}\Delta\psi_u \quad (\text{B.66})$$

$$c_{11} = \frac{T_N^n - T_L^n - T_{NW}^n + T_W^n}{\Delta\mu_l\Delta\psi_u} \quad (\text{B.67})$$

となる。

次に d の周囲の 8 点での値を (B.45) を用いて書くと、

$$T_L^n = d_{00} + d_{01}\frac{\Delta\psi_L}{2} + d_{02}\frac{\Delta\psi_L^2}{4} \quad (\text{B.68})$$

$$T_S^n = d_{00} - d_{01}\frac{\Delta\psi_S}{2} + d_{02}\frac{\Delta\psi_S^2}{4} \quad (\text{B.69})$$

$$T_N^n = d_{00} + d_{01}\left(\Delta\psi_L + \frac{\Delta\psi_N}{2}\right) + d_{02}\left(\Delta\psi_L + \frac{\Delta\psi_N}{2}\right)^2 \quad (\text{B.70})$$

$$T_{SS}^n = d_{00} - d_{01}\left(\Delta\psi_S + \frac{\Delta\psi_{SS}}{2}\right) + d_{02}\left(\Delta\psi_S + \frac{\Delta\psi_{SS}}{2}\right)^2 \quad (\text{B.71})$$

$$T_E^n = T_L^n + d_{10}\Delta\mu_r + d_{20}\Delta\mu_r^2 + d_{11}\frac{\Delta\psi_L}{2}\Delta\mu_r \quad (\text{B.72})$$

$$T_W^n = T_L^n - d_{10}\Delta\mu_l + d_{20}\Delta\mu_l^2 - d_{11}\frac{\Delta\psi_L}{2}\Delta\mu_l \quad (\text{B.73})$$

$$T_{SE}^n = T_S^n + d_{10}\Delta\mu_r + d_{20}\Delta\mu_r^2 - d_{11}\frac{\Delta\psi_S}{2}\Delta\mu_r \quad (\text{B.74})$$

$$T_{SW}^n = T_S^n - d_{10}\Delta\mu_l + d_{20}\Delta\mu_l^2 + d_{11}\frac{\Delta\psi_S}{2}\Delta\mu_l \quad (\text{B.75})$$

となる。

(B.68),(B.69) より、

$$d_{00} = \frac{\Delta\psi_S T_L^n + \Delta\psi_L T_S^n}{2\Delta\psi_d} - d_{02}\frac{\Delta\psi_L\Delta\psi_S}{4} \quad (\text{B.76})$$

$$d_{01} = \frac{T_L^n - T_S^n}{\Delta\psi_d} - d_{02}\frac{\Delta\psi_L - \Delta\psi_S}{2} \quad (\text{B.77})$$

となる。

$v_d^n > 0$  のとき、(B.68),(B.71) より、

$$d_{02} = \frac{\frac{T_L^n - T_S^n}{\Delta\psi_d} - \frac{T_S^n - T_{SS}^n}{\Delta\psi_{dd}}}{\Delta\psi_d + \Delta\psi_{dd}} \quad (\text{B.78})$$

$$\text{where } \Delta\psi_{dd} \equiv \frac{\Delta\psi_S + \Delta\psi_{SS}}{2}$$

付録 B 高精度移流スキーム

(B.74),(B.75) より、

$$d_{20} = \frac{\frac{T_{SE}^n - T_S^n}{\Delta\mu_r} - \frac{T_S^n - T_{SW}^n}{\Delta\mu_l}}{\Delta\mu_r + \Delta\mu_l} \quad (\text{B.79})$$

となり、 $v_d^n < 0$  のとき、(B.69),(B.70) より、

$$d_{02} = \frac{\frac{T_N^n - T_L}{\Delta\psi_u} - \frac{T_L^n - T_S^n}{\Delta\psi_d}}{\Delta\psi_u + \Delta\psi_d} \quad (\text{B.80})$$

(B.72),(B.73) より、

$$d_{20} = \frac{\frac{T_E^n - T_L^n}{\Delta\mu_r} - \frac{T_L^n - T_{SW}^n}{\Delta\mu_l}}{\Delta\mu_r + \Delta\mu_l} \quad (\text{B.81})$$

となる。

$u_d^n > 0$  のとき、(B.73),(B.75) より、

$$d_{10} = \frac{\Delta\psi_S(T_L^n - T_W^n) + \Delta\psi_L(T_S^n - T_{SW}^n)}{2\Delta\psi_d\Delta\mu_l} + d_{20}\Delta\mu_l \quad (\text{B.82})$$

$$d_{11} = \frac{T_L^n - T_S^n - T_W^n + T_{SW}^n}{\Delta\psi_d\Delta\mu_l} \quad (\text{B.83})$$

となり、 $u_d^n < 0$  のとき、(B.72),(B.74) より、

$$d_{10} = \frac{\Delta\psi_S(T_E^n - T_L^n) + \Delta\psi_L(T_{SE}^n - T_S^n)}{2\Delta\psi_d\Delta\mu_r} - d_{20}\Delta\mu_r \quad (\text{B.84})$$

$$d_{11} = \frac{T_E^n - T_{SE}^n - T_L^n + T_S^n}{\Delta\psi_d\Delta\mu_r} \quad (\text{B.85})$$

となる。

$\bar{T}_l^n$  は図 B.2 の斜線の領域での  $T^n$  の平均値であるから、

$$\xi_l^n = \frac{u_l^n}{h_{\mu l}}, \eta_l^n = \frac{v_l^n}{h_{\psi l}} \quad (\text{B.86})$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \bar{T}_l^n &= \frac{a}{\xi_l^n \Delta t \Delta \psi_L} \left[ \int_{\psi_L - \Delta \psi_L / 2}^{\psi_L + \Delta \psi_L / 2} \int_{\mu_l - \xi_l^n \Delta t}^{\mu_l} T^n d\mu d\psi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\psi_L - \Delta \psi_L / 2}^{\psi_L - \Delta \psi_L / 2 - \eta_l^n \Delta t} \int_{\mu_l + \frac{\xi_l^n}{\eta_l^n} (\psi - \psi_L + \Delta \psi_L / 2)}^{\mu_l + \frac{\xi_l^n}{\eta_l^n} (\psi - \psi_L + \Delta \psi_L / 2)} \{T^n(\psi) - T^n(\psi + \Delta \psi_L)\} d\mu d\psi \right] \\ &= c_{00} - \frac{1}{2} \eta_l^n \Delta t c_{01} + \left[ \frac{1}{12} \Delta \psi_L^2 + \frac{1}{3} (\eta_l^n \Delta t)^2 \right] c_{02} \\ &\quad - \frac{1}{2} \xi_l^n \Delta t c_{10} + \frac{1}{3} (\xi_l^n \Delta t)^2 c_{20} + \frac{1}{3} \xi_l^n \eta_l^n \Delta t^2 c_{11} \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

となる (ここでは  $u_l^n > 0, v_l^n > 0$  の場合のみ示したが、 $u_l^n, v_l^n$  の符号によらず結果は同じである)。 $\bar{T}_d^n$  も同様に、

$$\begin{aligned} \bar{T}_d^n &= d_{00} - \frac{1}{2} \eta_d^n \Delta t d_{01} + \frac{1}{3} (\eta_d^n \Delta t)^2 d_{02} \\ &\quad - \frac{1}{2} \xi_d^n \Delta t d_{10} + \left[ \frac{1}{12} \Delta \mu_L^2 + \frac{1}{3} (\xi_d^n \Delta t)^2 \right] d_{20} + \frac{1}{3} \xi_d^n \eta_d^n \Delta t^2 d_{11} \end{aligned} \quad (\text{B.88})$$

\*CCSR モデルでは 1/2 になっている

†CCSR モデルでは 1/4 になっている

となる。ここに、

$$\xi_d^n = \frac{u_d^n}{h_{\mu d}}, \eta_d^n = \frac{v_d^n}{h_{\psi d}} \quad (\text{B.89})$$

とした。

従って、

$$\begin{aligned} \tilde{T}_l^n &= c_{00} - \frac{1}{2} \xi_l^n \Delta t c_{10} + \left[ \frac{1}{3} (\xi_l^n \Delta t)^2 - \frac{\Delta \mu_l^2}{12} \right] c_{20} \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta_l^n \Delta t c_{01} + \frac{1}{3} (\eta_l^n \Delta t)^2 c_{02} + \frac{1}{3} \xi_l^n \eta_l^n \Delta t^2 c_{11} \end{aligned} \quad (\text{B.90})$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_d^n &= d_{00} - \frac{1}{2} \eta_d^n \Delta t d_{01} + \left[ \frac{1}{3} (\eta_d^n \Delta t)^2 - \frac{\Delta \psi_d^2}{12} \right] d_{02} \\ &\quad - \frac{1}{2} \xi_d^n \Delta t d_{10} + \frac{1}{3} (\xi_d^n \Delta t)^2 d_{20} + \frac{1}{3} \xi_d^n \eta_d^n \Delta t^2 d_{11} \end{aligned} \quad (\text{B.91})$$

となる。

最後に、境界条件の与え方について述べる。当然のことであるが、格子境界でのトレーサの値を二次補間によって求めるとき、陸の点の値が必要になる場合がある。そのような場合、陸の点の値は近傍の海の点を用いて適当に決めなければならない。一般に海洋モデルでは、海陸の境界でトレーサのフラックスがないものとしており、境界でトレーサの勾配がないことを適切に表現するような与え方が望ましい。

格子境界 l でのトレーサの値を計算する際、W, L は陸ではありえず、従って、N と S の両方、NW と SW の両方が陸になることはありえない。N, S のいずれか一方が陸であるとき L の中央を海陸境界が走っているのであるから、N, L, S の 3 点を用いて 2 次補間を行なった結果、L での勾配がゼロとなるように N あるいは S の値を仮定する。すなわち、

$$(T_N^n - T_L^n) \Delta \psi_d^2 = (T_S^n - T_L^n) \Delta \psi_u^2 \quad (\text{B.92})$$

とする。NW, SW のいずれか一方が陸であるときは

$$(T_{NW}^n - T_W^n) \Delta \psi_d^2 = (T_{SW}^n - T_W^n) \Delta \psi_u^2 \quad (\text{B.93})$$

とする。WW が陸であるときには、

$$(T_{WW}^n - T_W^n) \Delta \mu_l^2 = (T_L^n - T_W^n) \Delta \mu_{ll}^2 \quad (\text{B.94})$$

E が陸であるときには、

$$(T_E^n - T_L^n) \Delta \mu_l^2 = (T_W^n - T_L^n) \Delta \mu_r^2 \quad (\text{B.95})$$

とする。

格子境界 d についても同様にする。

†CCSR モデルでは 1/2 になっている

§CCSR モデルでは 1/4 になっている

