# 第6章　運動方程式（傾圧成分）

この章では運動量の移流項（6.1）と粘性項（6.2）について説明する。

移流項の計算に関する `MRI.COM` の特徴は、box 境界面を共有しなくても一点を共有するならば、U-box 間での運動量の交換があることである。これにより、地形に沿った自然な流速場を表現することができる。さらに、周囲に陸地のない U-box に関する移流計算においては $(\partial u/\partial y)^2$ および $(\partial v/\partial x)^2$ が保存される。

粘性項は一般直交座標を前提としメトリック項を含んで差分化されている。海陸境界では粘着条件が仮定され、Laplacian 型の差分がデフォルトとなっているが、水平方向については、biharmonic 型の差分（オプション `BIHARMONIC`）および粘性係数を流速場の関数とするパラメタリゼーション（`SMAGOR`）を使用することができる。

## 6.1　移流項

3 章で、運動量の移流に使用する流速は、T-box を用いた連続の式 (3.1)-(3.7) を基本として、その平均操作 (3.8) により求めることに触れた。これは、海底・海岸地形を考慮したフラックスを求めるための布石である。鉛直流速については、海底地形に沿った流れ（通称「駆け上がり」)、水平流速については、海岸地形に沿った流れ（通称「斜め移流」）を表現することができる（Ishizaki and Motoi 1999)。

ここでは、具体的に運動方程式移流項に用いる流速をどのように求めているのか、移流項の差分表現をどのようにして得るのかについて解説する。

以下、変数の添え字については、**水平方向には T-点を基準**とし、それを $(i,j)$ で表現する。従って U -点は $(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$ で表現される。鉛直方向については、**鉛直流速が定義されるレベルを T-点、U-点の上面**とし、それを $k$ と表現する。従って T-点、U-点は $k+\frac{1}{2}$ で定義される。

### 6.1.1　鉛直流速

3 章の定義 (3.1) と (3.8) に従うと、U-点 $(i+\frac{1}{2}.j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})$ の上面（レベル k）の鉛直質量フラックスは

$$\overline{W}^U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{W^T_{i,j,k}}{N_{i,j,k+\frac{1}{2}}} + \frac{W^T_{i+1,j,k}}{N_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}} + \frac{W^T_{i,j+1,k}}{N_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}} + \frac{W^T_{i+1,j+1,k}}{N_{i+1,j+1,k+\frac{1}{2}}} \tag{6.1}$$

で表現される。ここで、$N_{i,j,k+\frac{1}{2}}$ は、$T_{i,j}$ における、海の格子点数である。一方、U-点 $(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})$ の下面（同じくレベル k）の鉛直質量フラックスは

$$\mathscr{W}^U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{W^T_{i,j,k}}{N_{i,j,k-\frac{1}{2}}} + \frac{W^T_{i+1,j,k}}{N_{i+1,j,k-\frac{1}{2}}} + \frac{W^T_{i,j+1,k}}{N_{i,j+1,k-\frac{1}{2}}} + \frac{W^T_{i+1,j+1,k}}{N_{i+1,j+1,k-\frac{1}{2}}} \tag{6.2}$$

と表現される。$W^T$ はレベル k ですべて連続であるので、$N_{i,j,k+\frac{1}{2}} \le N_{i,j,k-\frac{1}{2}}$ であることから、$\overline{W}^U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}$ と $\mathscr{W}^U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}$ は同じになるとは限らず、不連続が生じるようにみえる。しかしこれは、「鉛直斜め方向の質量フラックス」を考慮することにより解決される。

### 単方向にだけ変化する海底地形

階段状の海底地形上に順圧流がある場合を考えよう。U-点は T-点の中点にある。図 6.1a は T-box に対する質量保存を表している。これを基本として、U-box に対する質量保存を表すにあたって、T-box に対する質量保存を平均することで求めると、図 6.1b のようになる。最初の階段を例にとると、左側の側面では、左側の T-点 (3.0) と右側の T-点 (0.0) の右向き流量の平均として、1.5 のフラックスが海から壁に入ることになる。一方、上面では、左側の T-点 (3.0) と右側の T-点 (0.0) の鉛直フラックスの平均として、1.5 のフラックスが海底から生じることになる。側面から入った分と上面から出る分は同じである。これは、本来斜めであるはずの海底地形に沿う流れを良く表現している。

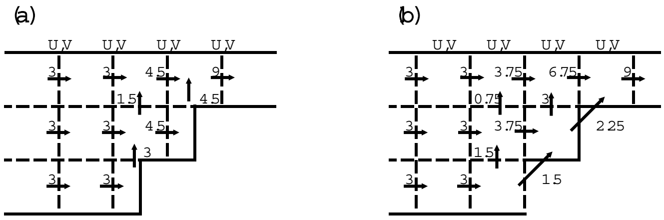

図 6.1: (a) 階段状の地形で T-box に対して定義される流量フラックス。(b) 階段状の地形で U-box に対して定義される流量フラックス。

### 2 次元方向に変化する海底地形

上で考えたことを 2 次元に拡張する。

**例 1**　図 6.2 では、上層では全てが海、下層では、d-box を除いて海であるとしている。境界面における T-点で定義される鉛直流量 $W^T$ は上下層で連続でなければならない。そのため、 $W^T$ はそれぞれの層で海の部分に対して等分配されるとする。つまり、上層では a-d のそれぞれの box に対して $W^T/4$、下層では a-c のそれぞれの box に対して $W^T/3$ を分配する。下層から上層へ移るときには、a（下） → d（上）、b（下） → d（上）、c（下） → d（上）へそれぞれ $W^T/3 - W^T/4 = W^T/12$ のフラックスがあれば質量収支が閉じることになる。運動方程式の移流項を構成するにあたっては、このフラックスによって、box 間で運動量が運ばれるとする。運ばれる運動量は中央差分に基づき、box 間の平均値である。

**例 2**　図 6.3 では、上層では全てが海、下層では、b-box だけが海であるとしている。ここでも同様に境界面における T-点で定義される鉛直流量 $W^T$ は上層にとっても下層にとっても同じであることから $W^T$ はそれぞれの層で海の部分に対して等分配されるとする。上層では a-d のそれぞれの box に対して $W^T/4$ 分配され、下層では b-box の流量は $W^T$ である。従って、下層から上層へ移るときには、b（下） → a（上）、b（下） → c（上）、b（下） → d（上）へそれぞれ $(W^T - W^T/4)/3 = W^T/4$ のフラックスがあるとする。

**例 3**　図 6.4 では、上層では a,b,c-box が海、下層では、a,b-box が海であるとしている。上層では a-c のそれぞれの box に対して $W^T/3$ 分配され、下層では a-b のそれぞれの box に対して $W^T/2$ が分配される。従って、下層から上層へ移るときには、a（下） → c（上）、b（下） → c（上） へそれぞれ $(W^T/2 - W^T/3) = W^T/6$ のフラックスがあるとする。

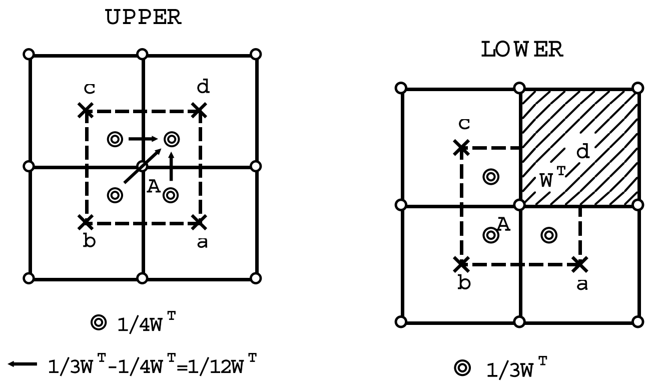


図 6.2: 2 次元の場合（例 1）。(a) 下面。(b) 上面。

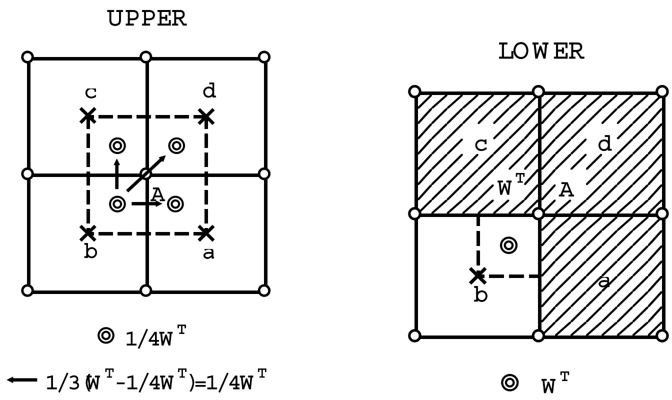


図 6.3: 2 次元の場合（例 2）。(a) 下面。(b) 上面。

**一般化**　任意の海陸分布の場合について考えてみる。添字 $l$ は下層を、添字 $u$ は上層を表すものとする。また、$\mathbf{d}_\mathrm{l}$ は陸、$\mathbf{d}_\mathrm{u}$ は海であるとして、$\mathbf{d}_\mathrm{u}$ に入ってくる「駆け上がり」流量を考える。$N_l$ を下層の、ある T-点の周りにある U-点のうち、海であるものの数、$N_u$ を上層の、ある T-点の周りにある U-点のうち、海であるものの数であるとする（$1 \leq N_l \leq N_u \leq 4$）。

下層の海 box ではそれぞれ $W^T/N_l$ の流量があり、そのうち、$W^T/N_u$ 流量が真上に行く。残りの分、

$$W^T/N_l - W^T/N_u = W^T(N_u - N_l)/(N_l N_u) \tag{6.3}$$

が駆け上がり流量として、上が海で下が陸の box に入っていく。その数は $N_u - N_l$ であるので、その 1 つである $\mathbf{d}_\mathrm{u}$ に対しては

$$W^T(N_u - N_l)/(N_l N_u) \times 1/(N_u - N_l) = W^T/(N_l N_u) \tag{6.4}$$

のフラックスが入ってくる。これが下層の数の分 $N_l$ であるので、最終的には $\mathbf{d}_\mathrm{u}$ に対して

$$W^T/(N_l N_u) \times N_l = W^T/N_u \tag{6.5}$$

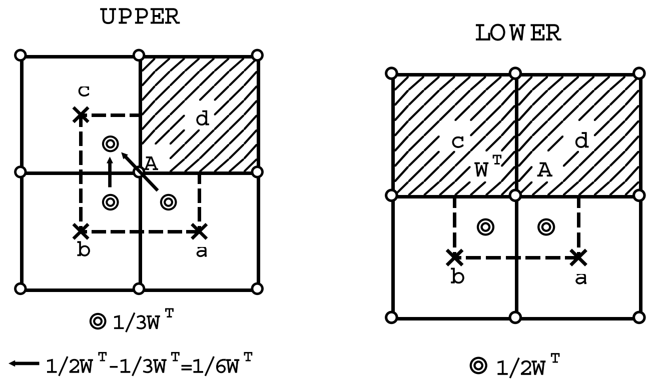


図 6.4: 2 次元の場合（例 3）。(a) 下面。(b) 上面。

のフラックスがあることになる。

$\mathbf{a}_l$ 等の記号が、box の名前だけでなく、海陸インデックス（海:1, 陸:0）を表すとしよう（モデルの変数でいえば AEXL）。上の議論をまとめると、$\mathbf{a}_l$ から $\mathbf{d}_u$ への「駆け上がり」流量と、それに伴う、運動量フラックスは

$$\mathbf{a}_l W^T/(N_l N_u) \quad \text{and} \quad \mathbf{a}_l W^T(u_{\mathrm{a}_l} + u_{\mathrm{d}_u})/(2N_l N_u) \tag{6.6}$$

となる。ここで、$u_{\mathrm{a}_l}, u_{\mathrm{d}_u}$ は $\mathbf{a}_l, \mathbf{d}_u$ における水平流速である。真上（真下）への移流・運動量フラックスは

$$\mathbf{a}_l W^T/N_u \quad \text{and} \quad \mathbf{a}_l W^T(u_{\mathrm{a}_l} + u_{\mathrm{a}_u})/(2N_u) \tag{6.7}$$

となる。同様の処理を他の box に対しても行なえば、一般化は終了である。

## 6.1.2　水平流速

### 水平質量フラックス

任意の海岸地形での U-box に対する水平移流フラックスを求める。T-box に対する連続の式 (3.1)-(3.7) から出発する。$e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ が U-box の海陸インデックス（海:1, 陸:0）であるとすると、T-box に対する連続の式を計算するのに必要な移流フラックスは

$$\begin{aligned} U^T_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2}(e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})u^*_{i+\frac{1}{2},j}\Delta y_{i+\frac{1}{2},j}\Delta z \\ &\text{and} \\ V^T_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})v^*_{i,j+\frac{1}{2}}\Delta x_{i,j+\frac{1}{2}}\Delta z \end{aligned} \tag{6.8}$$

となる。ただし、$\Delta z$ の添え字 $(k+\frac{1}{2})$ を省略する。

これを連続の式 (3.1) に代入し、さらにそれらの平均をとる、U-box に対する連続の式 (3.8) に代入する

と、X 方向（東西）の成分に対しては、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{XMC}^{U}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{2} \Delta z \\
&\times \left\{ \frac{1}{N_{i,j}} [(e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) u^{*}_{i-\frac{1}{2},j} - (e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) u^{*}_{i+\frac{1}{2},j}] \right. \\
&+ \frac{1}{N_{i+1,j}} [(e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) u^{*}_{i+\frac{1}{2},j} - (e_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}) u^{*}_{i+\frac{3}{2},j}] \\
&+ \frac{1}{N_{i,j+1}} [(e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}) u^{*}_{i-\frac{1}{2},j+1} - (e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}) u^{*}_{i+\frac{1}{2},j+1}] \\
&\left. + \frac{1}{N_{i+1,j+1}} [(e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}) u^{*}_{i+\frac{1}{2},j+1} - (e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}}) u^{*}_{i+\frac{3}{2},j+1}] \right\} \\
&= e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{2} \Delta z \times \left\{ \left[ \frac{1}{N_{i,j}} (e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) u^{*}_{i-\frac{1}{2},j} \right. \right. \\
&+ \left( -\frac{1}{N_{i,j}} + \frac{1}{N_{i+1,j}} \right) (e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) u^{*}_{i+\frac{1}{2},j} \\
&\left. - \frac{1}{N_{i+1,j}} (e_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}) u^{*}_{i+\frac{3}{2},j} \right] \\
&+ \left[ \frac{1}{N_{i,j+1}} (e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}) u^{*}_{i-\frac{1}{2},j+1} \right. \\
&+ \left( -\frac{1}{N_{i,j+1}} + \frac{1}{N_{i+1,j+1}} \right) (e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}) u^{*}_{i+\frac{1}{2},j+1} \\
&\left. \left. - \frac{1}{N_{i+1,j+1}} (e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}}) u^{*}_{i+\frac{3}{2},j+1} \right] \right\}
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

が得られる。

$$
N_{i,j} = e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i-\frac{1}{2}.j+\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}
\tag{6.10}
$$

であることを考慮すると、

$$
\begin{aligned}
&\left( -\frac{1}{N_{i,j}} + \frac{1}{N_{i+1,j}} \right) (e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) \\
&\qquad = \frac{1}{N_{i,j}} (e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{N_{i+1,j}} (e_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}})
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left( -\frac{1}{N_{i,j+1}} + \frac{1}{N_{i+1,j+1}} \right) (e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}) \\
&\qquad = \frac{1}{N_{i,j+1}} (e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}) - \frac{1}{N_{i+1,j+1}} (e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}})
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

である。従って、(3.11),(3.12) を用いると、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{XMC}^U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{2}\Delta z \Big\{ \Big[ & \frac{1}{N_{i,j}}(e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})(u^*_{i-\frac{1}{2},j} + u^*_{i+\frac{1}{2},j}) \\
& - \frac{1}{N_{i+1,j}}(e_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}})(u^*_{i+\frac{1}{2},j} + u^*_{i+\frac{3}{2},j})\Big] \\
& + \Big[\frac{1}{N_{i,j+1}}(e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}})(u^*_{i-\frac{1}{2},j+1} + u^*_{i+\frac{1}{2},j+1}) \\
& - \frac{1}{N_{i+1,j+1}}(e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} + e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}})(u^*_{i+\frac{1}{2},j+1} + u^*_{i+\frac{3}{2},j+1})\Big]\Big\} \\
& = e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big[ e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big( \frac{1}{N_{i,j}} U^U_{i,j} + \frac{1}{N_{i,j+1}} U^U_{i,j+1} \Big) \\
& - e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} \Big( \frac{1}{N_{i+1,j}} U^U_{i+1,j} + \frac{1}{N_{i+1,j+1}} U^U_{i+1,j+1} \Big) + e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \frac{1}{N_{i,j}} U^U_{i,j} \\
& - e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} \frac{1}{N_{i+1,j+1}} U^U_{i+1,j+1} + e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} \frac{1}{N_{i,j+1}} U^U_{i,j+1} - e_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} \frac{1}{N_{i+1,j}} U^U_{i+1,j} \Big]
\end{aligned} \tag{6.13}
$$

が得られる。これに Y 成分（南北成分）を加えると、最終的な連続式の水平部分は

$$
\mathrm{HMC}^U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \tag{6.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\times \Big[ & e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big( \frac{1}{N_{i,j}} U^U_{i,j} + \frac{1}{N_{i,j+1}} U^U_{i,j+1} \Big) - e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} \Big( \frac{1}{N_{i+1,j}} U^U_{i+1,j} + \frac{1}{N_{i+1,j+1}} U^U_{i+1,j+1} \Big) \\
& + e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \Big( \frac{1}{N_{i,j}} V^U_{i,j} + \frac{1}{N_{i+1,j}} V^U_{i+1,j} \Big) - e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} \Big( \frac{1}{N_{i,j+1}} V^U_{i,j+1} + \frac{1}{N_{i+1,j+1}} V^U_{i+1,j+1} \Big) \\
& + e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \frac{1}{N_{i,j}} (U^U_{i,j} + V^U_{i,j}) - e_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} \frac{1}{N_{i+1,j+1}} (U^U_{i+1,j+1} + V^U_{i+1,j+1}) \\
& + e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} \frac{1}{N_{i,j+1}} (U^U_{i,j+1} - V^U_{i,j+1}) - e_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} \frac{1}{N_{i+1,j}} (U^U_{i+1,j} - V^U_{i+1,j}) \Big]
\end{aligned} \tag{6.15}
$$

となる。図 6.5 の様に質量フラックス $M_E, M_N, M_{NE}, M_{SE}$ を定義すると、それらは

$$
\begin{aligned}
M_{\mathbf{E}_{i,j+\frac{1}{2}}} &= e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big( \frac{1}{N_{i,j}} U^U_{i,j} + \frac{1}{N_{i,j+1}} U^U_{i,j+1} \Big) \\
M_{\mathbf{N}_{i+\frac{1}{2},j}} &= e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \Big( \frac{1}{N_{i,j}} V^U_{i,j} + \frac{1}{N_{i+1,j}} V^U_{i+1,j} \Big) \\
M_{\mathbf{NE}_{i,j}} &= e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \frac{1}{N_{i,j}} (U^U_{i,j} + V^U_{i,j}) \\
M_{\mathbf{SE}_{i,j}} &= e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \frac{1}{N_{i,j}} (U^U_{i,j} - V^U_{i,j})
\end{aligned} \tag{6.16}
$$

の様に表現され、U-点に対する連続式の水平部分は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{HMC}^U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= M_{\mathbf{E}_{i,j+\frac{1}{2}}} - M_{\mathbf{E}_{i+1,j+\frac{1}{2}}} + M_{\mathbf{N}_{i+\frac{1}{2},j}} - M_{\mathbf{N}_{i+\frac{1}{2},j+1}} \\
& + M_{\mathbf{NE}_{i,j}} - M_{\mathbf{NE}_{i+1,j+1}} + M_{\mathbf{SE}_{i,j+1}} - M_{\mathbf{SE}_{i+1,j}}
\end{aligned} \tag{6.17}
$$

となる。ここで、$M_E, M_N$ は緯度・経度に平行な成分、$M_{NE}, M_{SE}$ は、緯度・経度に対角な成分である。

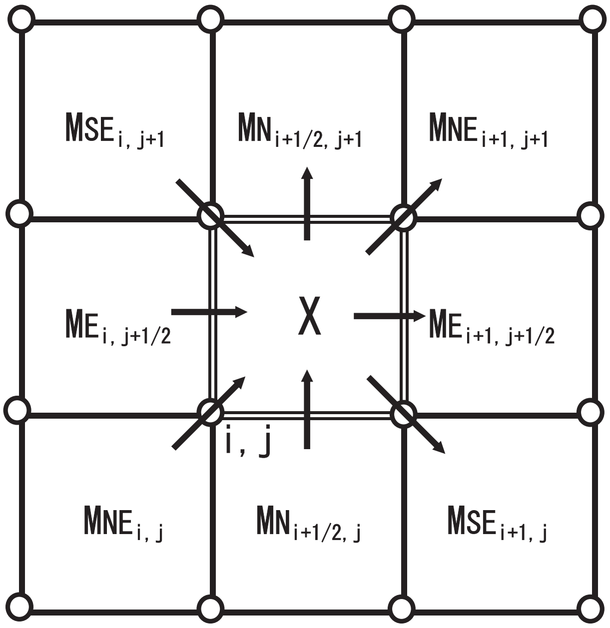


図 6.5: U-点に対する質量フラックス

全てが海である場合（$N=4$）、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{HMC}^{U}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,&\Big[\frac{1}{2}(U^{U}_{i,j}+U^{U}_{i,j+1})-\frac{1}{2}(U^{U}_{i+1,j}+U^{U}_{i+1,j+1})\\
&\quad+\frac{1}{2}(V^{U}_{i,j}+V^{U}_{i,j+1})-\frac{1}{2}(V^{U}_{i+1,j}+V^{U}_{i+1,j+1})\Big]\\
+\frac{1}{2}\,&\Big[\frac{1}{2}(U^{U}_{i,j}+V^{U}_{i,j})-\frac{1}{2}(U^{U}_{i+1,j+1}+V^{U}_{i+1,j+1})\\
&\quad+\frac{1}{2}(U^{U}_{i,j+1}-V^{U}_{i,j+1})-\frac{1}{2}(U^{U}_{i+1,j}-V^{U}_{i+1,j})\Big]
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

となり、緯度・経度に平行な成分（3.10）と対角な成分（3.15）との（1/2：1/2）の平均となるが、エンストロフィーの保存を満たす、Arakawa スキームの条件（比を 2/3：1/3 とすべき）をみたしていない。

### 水平運動量移流

但し (6.18) をみればわかるように、全てが海である場合に限れば、緯度・経度に平行な成分と対角な成分の比（$\alpha:\beta$ とする）については $\alpha+\beta=1$ である限り、どのような値を用いても良い事がわかる。そこで、MRI.COM では、全てが海である場合は Arakawa スキームとなるように、$\alpha=2/3$、$\beta=1/3$ を選ぶこととする。このとき、東西流速の移流は

表 6.1: 8 通りの地形分布（a,b,c）に対する U-box のフラックス $U^U_{i,j}$ に係わる係数。軸平行な成分に対するもの（B）と対角成分に対するもの（C）。A 欄はそれぞれの場合にのみ１，他の場合には０になるような係数値。

| CASE<br>n | Land-sea index<br>a　b　c | A | B<br>Cofficient of $U^U_{i,j}$<br>(axisi-parallel)<br>+ | C<br>Cofficient of $U^U_{i,j}$<br>(horizontally-diagonal)<br>× |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1　1　1 | abc | 1/3 | 1/6 |
| 2 | 1　1　0 | ab(1−c) | 0 | 1/3 |
| 3 | 1　0　1 | ab(1−b)c | 1/3 | 0 |
| 4 | 0　1　1 | (1−a)bc | 1/3 | 1/3 |
| 5 | 1　0　0 | − | 0 | 0 |
| 6 | 0　1　0 | (1−a)b(1−c) | 0 | 1/2 |
| 7 | 0　0　1 | (1−a)(1−b)c | 1/2 | 0 |
| 8 | 0　0　0 | − | 0 | 0 |

$$
\begin{aligned}
\mathrm{CAD}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(u) = \frac{2}{3}\Big[&\frac{1}{2}(u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})\frac{1}{2}(U^U_{i,j}+U^U_{i,j+1})\\
&-\frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+u_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}})\frac{1}{2}(U^U_{i+1,j}+U^U_{i+1,j+1})\\
&+\frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}+u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})\frac{1}{2}(V^U_{i,j}+V^U_{i+1,j})\\
&-\frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}})\frac{1}{2}(V^U_{i,j+1}+V^U_{i+1,j+1})\Big]\\
+\frac{1}{3}\Big[&\frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})\frac{1}{2}(U^U_{i,j}+V^U_{i,j})\\
&-\frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+u_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}})\frac{1}{2}(U^U_{i+1,j+1}+V^U_{i+1,j+1})\\
&+\frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}})\frac{1}{2}(U^U_{i,j+1}-V^U_{i,j+1})\\
&-\frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+u_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}})\frac{1}{2}(U^U_{i+1,j}-V^U_{i+1,j})\Big]
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

となる。これが、一般化された Arakawa スキームである。荒川のＢ格子のもとでのこのスキームでは、渦度の 2 乗である、エンストロフィに準じた量（$(\partial u/\partial y)^2$ および $(\partial v/\partial x)^2$）が保存される。

陸が一つでもある場合には、$\alpha = 1/2$、$\beta = 1/2$ を選ぶ。これらの一般化は以下のように行なう。図 6.2b において **d** も海である場合を考える。**a - d** を 海陸インデックスを表すとすると、**a - c** がとり得る 8 つの場合に対し、移流項に対する中央の T-点 A でのフラックス $U^U_{ij}$ が関わる項の寄与に関して、緯線に平行な成分 (B) と対角な成分 (C) に分けて示したのが表 6.1 である。これらは、上までの議論から決まる。なお、A はそれぞれの海陸分布の組み合わせに対して、その組み合わせが成り立つ場合のみ 1、それ以外では 0 になるように、**a - c** を表したものである。

$U^U_{ij}$ がかかる項の寄与を一般化する。緯度線に平行な成分に関しては A と B の積を 8 つの場合について加え、同様に緯度線に対角な成分に関しては A と C の積を 8 つの場合について加えれば良い。

$$\begin{aligned} c_1 &= \sum_{n=1}^{8} \mathbf{A}_n \mathbf{B}_n = \frac{1}{6}\mathbf{c}(\mathbf{ab}-\mathbf{a}-\mathbf{b}+3) \\ &\quad \textbf{and} \\ c_2 &= \sum_{n=1}^{8} \mathbf{A}_n \mathbf{C}_n = \frac{1}{6}\mathbf{b}(3-\mathbf{a}-\mathbf{c}) \end{aligned} \tag{6.20}$$

これを用いて、$U^U_{ij}$ が関与する移流項の表現は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{d}}{2}(u_\mathbf{c}+u_\mathbf{d})c_1 U^U_{i,j} &= \frac{1}{2}(u_\mathbf{c}+u_\mathbf{d})\frac{1}{6}\mathbf{cd}(\mathbf{ab}-\mathbf{a}-\mathbf{b}+3)U^U_{i,j} \\ &\quad \textbf{and} \\ \frac{\mathbf{d}}{2}(u_\mathbf{b}+u_\mathbf{d})c_2 U^U_{i,j} &= \frac{1}{2}(u_\mathbf{b}+u_\mathbf{d})\frac{1}{6}\mathbf{bd}(3-\mathbf{a}-\mathbf{c})U^U_{i,j} \end{aligned} \tag{6.21}$$

最終的な一般化された運動量フラックスは

$$\begin{aligned} F_{E_{i,j+\frac{1}{2}}}(u) &= \frac{1}{2}(u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})M_{E_{i,j+\frac{1}{2}}} \\ F_{N_{i+\frac{1}{2},j}}(u) &= \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}+u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})M_{N_{i+\frac{1}{2},j}} \\ F_{NE_{i,j}}(u) &= \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})M_{NE_{i,j}} \\ F_{SE_{i,j}}(u) &= \frac{1}{2}(u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})M_{SE_{i,j}} \end{aligned} \tag{6.22}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} M_{E_{i,j+\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{6}(C_{XN_{i,j}}U^U_{i,j}+C_{XS_{i,j+1}}U^U_{i,j+1}) \\ M_{N_{i+\frac{1}{2},j}} &= \frac{1}{6}(C_{YE_{i,j}}V^U_{i,j}+C_{YW_{i+1,j}}V^U_{i+1,j}) \\ M_{NE_{i,j}} &= \frac{1}{6}C_{NE_{i,j}}(U^U_{i,j}+V^U_{i,j}) \\ M_{SE_{i,j}} &= \frac{1}{6}C_{SE_{i,j}}(U^U_{i,j}-V^U_{i,j}) \end{aligned} \tag{6.23}$$

で、さらに、

$$\begin{aligned} C_{XN_{i,j}} &= e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}-e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}-e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}+3) \\ C_{XS_{i,j}} &= e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}(e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+3) \\ C_{YE_{i,j}} &= e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}(e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}-e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}+3) \\ C_{YW_{i,j}} &= e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}(e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}-e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}+3) \\ C_{NE_{i,j}} &= e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}(3-e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) \\ C_{SE_{i,j}} &= e_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}(3-e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-e_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \tag{6.24}$$

である。運動量移流の一般化された差分表現は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathrm{CAD}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(u) &= F_{E_{i,j+\frac{1}{2}}}(u)-F_{E_{i+1,j+\frac{1}{2}}}(u)+F_{N_{i+\frac{1}{2},j}}(u)-F_{N_{i+\frac{1}{2},j+1}}(u) \\ &\quad +F_{NE_{i,j}}(u)-F_{NE_{i+1,j+1}}(u)+F_{SE_{i,j+1}}(u)-F_{SE_{i+1,j}}(u) \end{aligned} \tag{6.25}$$

## 6.2　粘性項

コンパイルオプションによって、水平粘性については（Laplacian 型（既定値）または biharmonic 型（オプション BIHARMONIC））×（時間変化しない粘性係数による方法（既定値）または Smagorinsky のパラメタリゼーション（オプション SMAGOR））の組み合わせを使うことができる。鉛直粘性については、1 次元の定数係数 Laplacian 型を基本とし、海底摩擦のパラメタリゼーション（Weatherly 1972）を使う。

### 6.2.1　水平粘性

horizontal tension $D_T$, horizontal shear $D_S$ を次のように定義する。

$$D_T = h_\psi \frac{\partial}{h_\mu \partial \mu}\left(\frac{u}{h_\psi}\right) - h_\mu \frac{\partial}{h_\psi \partial \psi}\left(\frac{v}{h_\mu}\right) \tag{6.26}$$

$$D_S = h_\psi \frac{\partial}{h_\mu \partial \mu}\left(\frac{v}{h_\psi}\right) + h_\mu \frac{\partial}{h_\psi \partial \psi}\left(\frac{u}{h_\mu}\right) \tag{6.27}$$

粘性項は、水平粘性係数を $\nu_H$ として

$$\mathscr{V}_u = \frac{1}{h_\psi^2}\frac{\partial}{h_\mu \partial \mu}\left(h_\psi^2 \nu_H D_T\right) + \frac{1}{h_\mu^2}\frac{\partial}{h_\psi \partial \psi}\left(h_\mu^2 \nu_H D_S\right) \tag{6.28}$$

$$\mathscr{V}_v = \frac{1}{h_\psi^2}\frac{\partial}{h_\mu \partial \mu}\left(h_\psi^2 \nu_H D_S\right) - \frac{1}{h_\mu^2}\frac{\partial}{h_\psi \partial \psi}\left(h_\mu^2 \nu_H D_T\right) \tag{6.29}$$

となる。

地理座標の場合は $(\mu,\psi) = (\lambda,\phi), h_\lambda = a\cos\phi, h_\phi = a$ となるので $D_T, D_S$ は、

$$D_T = \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{v}{a}\tan\phi \tag{6.30}$$

$$D_S = \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{u}{a}\tan\phi \tag{6.31}$$

粘性項は、

$$\mathscr{V}_u = \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial(\nu_H D_T)}{\partial \lambda} + \frac{1}{a}\frac{\partial(\nu_H D_S)}{\partial \phi} - \nu_H D_S \frac{2\tan\phi}{a} \tag{6.32}$$

$$\mathscr{V}_v = \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial(\nu_H D_S)}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial(\nu_H D_T)}{\partial \phi} + \nu_H D_T \frac{2\tan\phi}{a} \tag{6.33}$$

となる。

biharmonic の場合は、粘性係数 $\nu_{BH}$ を使ってこの手続きを繰り返す。すなわち、$D_T, D_S$ を計算するとき、上式で求めた $\mathscr{V}_u, \mathscr{V}_v$ の符号を反転したものを $u, v$ の代わりに使い、再び粘性項を計算する。biharmonic 型の差分によって、格子間隔より十分大きな波長の渦に対しては弱く、格子間隔程度の渦に対しては強く粘性を働かせることが可能になる。高解像度で計算する場合、モデルで表現可能な渦の不自然な減衰を避けたいときにこのオプションを用いるべきである。しかし、水平シアーの勾配が大きい場所（強流域の縁）では非現実的な極大・極小値が出現することに注意する必要がある。また、中規模渦を解像しない粗い格子設定での使用は控えるべきである。

### 6.2.2 水平粘性における Smagorinsky のパラメタリゼーション

粘性係数を局所的な場の変形率（速度の関数）として求める（Griffies and Hallberg, 2000）。この方法を biharmonic で用いることによって、モデル格子間隔以下のスケールの渦に対しては必要な粘性を効かせるとともに、モデル格子で解像される渦に対しては大きな制動がかからないようにすることができる。

変形時間（deformation rate）を

$$T^{-1} = |D| = \sqrt{D_T^2 + D_S^2} \tag{6.34}$$

とし、粘性係数を下のように決める。

$$\nu_H = \left(\frac{C\Delta_{\min}}{\pi}\right)^2 |D| \tag{6.35}$$

$$\nu_{BH} = \frac{\Delta_{\min}^2}{8}\nu_H \tag{6.36}$$

$C$（`cscl`）は無次元のスケーリングパラメータであり、数値計算の安定性を考慮して決める。$\Delta_{\min}$ は東西・南北の格子間隔のうち、小さい方である。

$C$ の指標としては grid Reynolds 数の制限：

$$\nu_H > U\frac{\Delta_{\min}}{2} \tag{6.37}$$

境界層の幅に関する制限：

$$\nu_H > \beta\Delta_{\min}^3 \tag{6.38}$$

CFL 条件：

$$\nu_H < \frac{\Delta_{\min}^2}{2\Delta t} \tag{6.39}$$

ここに、$\beta$ はコリオリ・パラメータ $f$ の緯度による変化率である。変形時間 $|D|$ を $U/\Delta_{\min}$ でスケーリングすると (6.37) から、$C > \pi/\sqrt{2} \approx 2.2$ が数値計算の安定条件である（Griffies and Hallberg, 2000）。

### 6.2.3 粘性項の差分

変形率:

$$\begin{aligned}
D_{Ti,j} &= \frac{h_{\psi i,j}}{h_{\mu i,j}}\overline{\delta_\mu\left(\frac{u}{h_\psi}\right)_{i,j}}^{\psi} - \frac{h_{\mu i,j}}{h_{\psi i,j}}\overline{\delta_\psi\left(\frac{v}{h_\mu}\right)_{i,j}}^{\mu} \\
D_{Si,j} &= \frac{h_{\psi i,j}}{h_{\mu i,j}}\overline{\delta_\mu\left(\frac{v}{h_\psi}\right)_{i,j}}^{\psi} + \frac{h_{\mu i,j}}{h_{\psi i,j}}\overline{\delta_\psi\left(\frac{u}{h_\mu}\right)_{i,j}}^{\mu}
\end{aligned} \tag{6.40}$$

粘性力:

$$\begin{aligned}
F_{xi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}\times \\
&\times \left[\frac{1}{h_{\psi i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}\delta_i\left(\Delta y\Delta z h_\psi\overline{\nu_H D_T}^{\psi}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{h_{\mu i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}\delta_j\left(\Delta x\Delta z h_\mu\overline{\nu_H D_S}^{\mu}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right] \\
F_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}\times \\
&\times \left[\frac{1}{h_{\psi i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}\delta_i\left(\Delta y\Delta z h_\psi\overline{\nu_H D_S}^{\psi}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{h_{\mu i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}\delta_j\left(\Delta x\Delta z h_\mu\overline{\nu_H D_T}^{\mu}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned} \tag{6.41}$$

ここに、

$$
\begin{aligned}
\delta_\mu A_{i,j} &\equiv \frac{A_{i+\frac{1}{2},j} - A_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\mu} \\
\delta_\psi A_{i,j} &\equiv \frac{A_{i,j+\frac{1}{2}} - A_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\psi} \\
\delta_i A_{i,j} &\equiv A_{i+\frac{1}{2},j} - A_{i-\frac{1}{2},j} \\
\delta_j A_{i,j} &\equiv A_{i,j+\frac{1}{2}} - A_{i,j-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
\overline{A_{i,j}}^{\mu} &\equiv \frac{1}{2}(A_{i-\frac{1}{2},j} + A_{i+\frac{1}{2},j}) \\
\overline{A_{i,j}}^{\psi} &\equiv \frac{1}{2}(A_{i,j-\frac{1}{2}} + A_{i,j+\frac{1}{2}})
\end{aligned}
\tag{6.42}
$$

とした。

西側が壁の場合（図 6.6a）、壁での変形率は

$$
\begin{aligned}
D_{Ti,j+\frac{1}{2}} &= \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^-_{ij}} \\
D_{Si,j+\frac{1}{2}} &= \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^-_{ij}}
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

と計算し ($\Delta x^-_{ij}$ は U-点から西の壁までの距離)、粘性力への西側の壁の寄与は

$$
\begin{aligned}
F^W_{xi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} h_{\psi i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \Delta y_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta\tilde{z}_{i,j+\frac{1}{2}} h_{\psi i-\frac{1}{2},j} \nu_{Hi-\frac{1}{2},j} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^-_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \\
F^W_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} h_{\psi i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \Delta y_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta\tilde{z}_{i,j+\frac{1}{2}} h_{\psi i-\frac{1}{2},j} \nu_{Hi-\frac{1}{2},j} \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^-_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
\tag{6.44}
$$

とする ($\Delta\tilde{z}_{i,j+\frac{1}{2}}$ は西側の壁の高さ)。

### 6.2.4　鉛直粘性

Laplacian 型のみを考える。第 $(k+\frac{1}{2})$ 層の U-box が海底を含まないとき、このボックス上側の $\partial u/\partial z$ は、下のようになる（添字 $i,j$ 省略）。鉛直に隣接する流速点の中点は U-box 境界上にあることに注意。

$$
\frac{u_{k-\frac{1}{2}} - u_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta z_k}
$$

ここで、$\Delta z_k = (\Delta z_{k-\frac{1}{2}} + \Delta z_{k+\frac{1}{2}})/2$、$\Delta z_{k+\frac{1}{2}}$ は U-box の鉛直方向の長さ（`dzu`）である。U-box 下側の $\partial u/\partial z$ は、第 $(k+\frac{3}{2})$ 層の U-box が海底を含まないとき、$(u_{k+\frac{1}{2}} - u_{k+\frac{3}{2}})/\Delta z_{k+1}$、海底を含むとき（図 6.6b 左）、その厚さを $\delta z_{k+\frac{3}{2}}$ として

$$
\frac{2(u_{k+\frac{1}{2}} - u_{k+\frac{3}{2}})}{\Delta z_{k+1} + (\Delta z_{k+\frac{3}{2}} - \delta z_{k+\frac{3}{2}})}
$$

一般的な $\partial^2 u/\partial z^2$ の差分表現を、下のようにする。ただし、海底を含む場合に $\Delta z_{k+1} \approx \Delta z_{k+\frac{3}{2}}$ としている。

$$
\left[\frac{2(u_{k+\frac{3}{2}} - u_{k+\frac{1}{2}})}{\Delta z_{k+1}(1 + r_{k+\frac{3}{2}})} - \frac{u_{k+\frac{1}{2}} - u_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta z_k}\right] \Big/ \Delta z_{k+\frac{1}{2}}
\tag{6.45}
$$

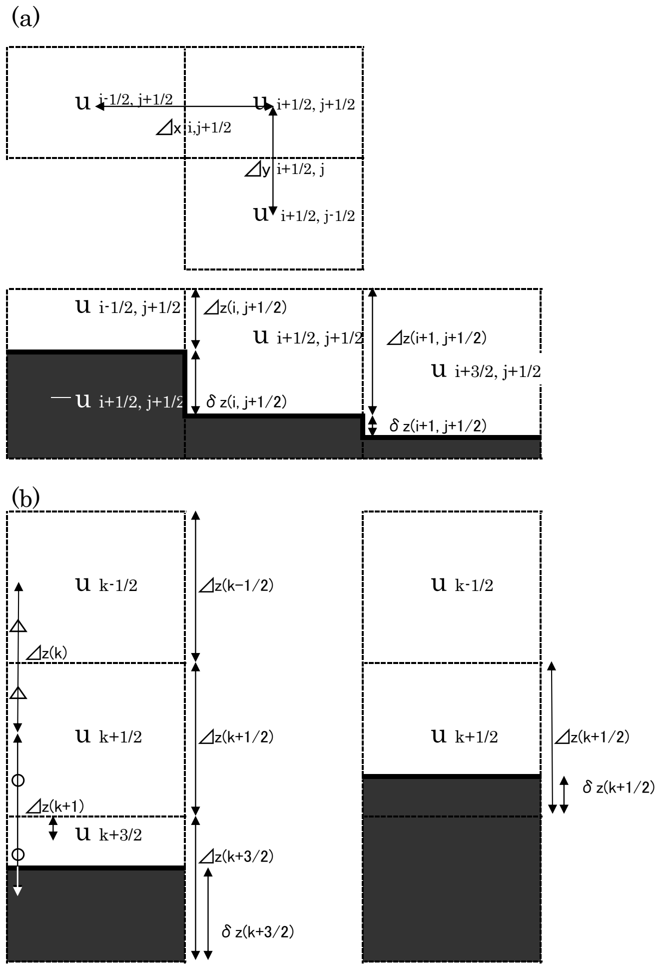


図 6.6: (a) 水平粘性参考図 :（上）平面図。（下）鉛直断面図。; (b) 鉛直粘性参考図 :（左）下に隣接する U-box が海底を持つ場合。（右）U-box 自体が海底を持つ場合。陰影部は海底地形をあらわす。

ここで

$$r_{k+\frac{3}{2}} = \frac{\Delta z_{k+\frac{3}{2}} - \delta z_{k+\frac{3}{2}}}{\Delta z_{k+\frac{3}{2}}}$$

である。なお、$k = \frac{1}{2}$ のとき (6.45) 式 [　] 内第 2 項は 0 とする。

### 6.2.5　底面摩擦

第 $(k+\frac{1}{2})$ 層の U-box が海底を含む場合（図 6.6b 右）、上に出て行く粘性フラックスは (6.45) 式 {　} 内第 2 項から求める。一方、下から入るフラックス $(\tau_x^b, \tau_y^b)$ は Weatherly（1972）に従って計算される。差分表現は以下のとおり。

$$\begin{pmatrix} \tau_x^b \\ \tau_y^b \end{pmatrix} = -\rho_0 \frac{C_{\mathrm{btm}} \sqrt{u_{k+\frac{1}{2}}^2 + v_{k+\frac{1}{2}}^2}}{\Delta z_{k+\frac{1}{2}} - \delta z_{k+\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k+\frac{1}{2}} \\ v_{k+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

ここで、$C_{\mathrm{btm}}$ は無次元の定数である。最下層に底面から入ってくる粘性フラックスは、最下層流速の 2 乗に比例し、流速ベクトルを $(\theta_0 + \pi)$ だけ回転させた向きを持つことになる。

なお、`MRI.COM` においては、

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{btm}} &= 1.225 \times 10^{-3}[\mathrm{cm}] \\ \theta_0 &= \pm\pi/18 \quad [\mathrm{rad}] \qquad (\equiv \quad 10[^\circ]) \end{aligned}$$

である。ただし、$\theta_0$ は北半球で正、南半球で負である。モデルにおける変数名は、$C_{\mathrm{btm}}$ : `abtm`、$\cos\theta$ : `bcs`、$\sin(\pm\theta_0)$ : `bsn*isgn` となっている。

## References


Griffies, S. and R. Hallberg, 2000: Biharmonic friction with a Smagorinsky-like viscosity for use in large-scale eddy-permitting ocean models, *Mon. Weath. Rev.*, **128**, 2935–2946.

Ishizaki, H. and T. Motoi, 1999: Reevaluation of the Takano-Oonishi scheme for momentum advection on bottom relief in ocean models, *J. Atmos. Ocean. Tech.*, **16**, 1994–2010.

Weatherly, 1972: A study of the bottom boundary layer of the Florida current., *J. Phys. Oceanogr.*, **2**, 54–72.