

## 第5章 自由表面方程式

運動方程式の順圧成分を解くのに、rigid-lid 近似を行なって順圧渦度方程式を解く方法を前節で扱った。この方法は緩和法を用いるが、繰り返し計算回数は東西、南北の格子点数のうち大きい方の数くらいかかる。これに対して、自由表面にした場合、傾圧成分の時間間隔に対して、順圧成分の時間間隔は 70 ~ 100 分の 1 である。高分解能のモデル計算を行なう場合には、こちらの方が有利である可能性が高い\*。さらに、並列計算を行なうことを考えた場合には、渦度方程式より、自由表面方程式の方が効率的である。主にこのような理由から、順圧成分を解くのに rigid-lid 近似が採用されていた、GFDL 型 OGCM に自由表面方程式を解くオプションが加えられるようになった。この節では、自由表面にした場合の方程式の解き方を説明する。

混合層を適切に表現するためには第 1 層目の厚みを 1m 程度に薄く設定する必要がある。しかしながら、標準的な自由表面を導入する場合、初期に設定した第 1 層目よりも海面が下がった時点で第 1 層目の厚さが 0 になり計算がストップするため、第 1 層目の厚さをある程度以上に設定する必要がある。特に world ocean では、海面が高いところ比べて相対的に数 m も低下する場所が現われる†。

この問題を解決するために、標準的な自由表面スキームでは第 1 層目の厚みだけが変化するのに対して、海面からある水平一様の深さ  $z = -H_B$  までの複数層全体が初期に設定された割合にそって変化するようにコード変更を行う (図 5.1)。これらの海面に沿って変動する層の鉛直座標に、 $\sigma$ -座標

$$\sigma \equiv \frac{z - \eta}{H_B + \eta} \quad (5.1)$$

を用い、これらの層を  $\sigma$ -layer と呼ぶ。ここでは海面からある水平一様の深さ ( $-H_B < z < \eta$ ) のみを  $\sigma$ -layer として扱うが、 $H_B$  を海底に設定すると Princeton Ocean Model (POM) などでも用いられている  $\sigma$ -layer モデルとなる。この自由表面モデルの拡張は 5.4 で述べる。

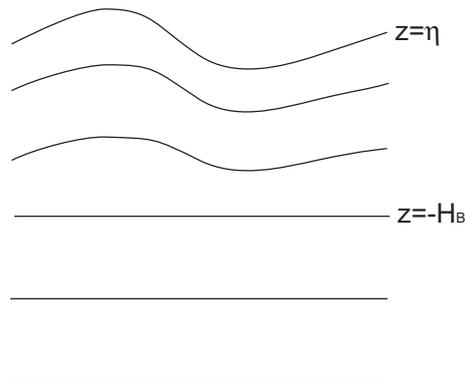


図 5.1:  $\sigma$ -layer の概念

\*NPERM (北太平洋  $1/4^\circ \times 1/6^\circ$  モデル) では東西方向の格子点数が 742 である。

†たとえば、 $1^\circ \times 1^\circ$  world ocean では北太平洋亜熱帯が平均から海面が約 1m 盛り上がるのに対して、Ross 海では約 2m 程度海面が下がる

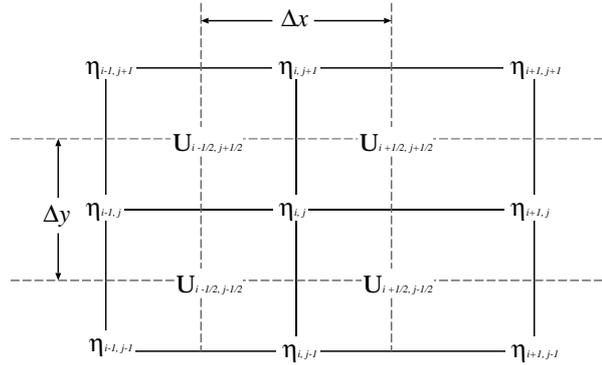


図 5.2: 自由表面方程式に関する変数の格子点配置

## 5.1 支配方程式

1 章でも説明したが、予報変数は海面の昇降  $\eta$ 、鉛直積分した速度  $U$ 、 $V$  で、運動方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -\frac{gH}{h_\mu} \frac{\partial \eta}{\partial \mu} + X \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -\frac{gH}{h_\psi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} + Y \quad (5.3)$$

ここで

$$X = -\int_{-H}^{\eta} \mathcal{A}(u) dz - \int_{-H}^{\eta} \frac{v}{h_\mu h_\psi} \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \psi} u - \frac{\partial h_\psi}{\partial \mu} v \right) dz - \frac{1}{h_\mu} \frac{1}{\rho_0} \int_{-H}^{\eta} dz \int_z^0 g \rho_\mu dz + \int_{-H}^{\eta} \gamma_u dz$$

$$Y = -\int_{-H}^{\eta} \mathcal{A}(v) dz + \int_{-H}^{\eta} \frac{u}{h_\mu h_\psi} \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \psi} u - \frac{\partial h_\psi}{\partial \mu} v \right) dz - \frac{1}{h_\psi} \frac{1}{\rho_0} \int_{-H}^{\eta} dz \int_z^0 g \rho_\psi dz + \int_{-H}^{\eta} \gamma_v dz$$

であり、連続の式は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{h_\mu h_\psi} \left\{ \frac{\partial (h_\psi U)}{\partial \mu} + \frac{\partial (h_\mu V)}{\partial \psi} \right\} = (P - E) \quad (5.4)$$

である。 $P$  は降水（下向き正）で、 $E$  は蒸発（上向き正）である。

図 5.2 に示した通り、 $\eta$ （変数名 HT）は T-点、 $U$ 、 $V$ （変数名 UM, VM）は U-点で定義する。式 (5.2)、式 (5.3) における  $X$ 、 $Y$  はサブルーチン CLINIC で既に計算されている（変数名 ZUL, ZVL）。

## 5.2 時間積分について

傾圧モードの  $n-1$  ステップ目 ( $t = t_{n-1}$ ) から  $n$  ステップ目 ( $t = t_n, \Delta t = t_n - t_{n-1}$ ) に進めるとき、順圧モードは、傾圧モードの  $n-1$  ステップ目 ( $t = t_{n-1}$ ) における、鉛直積分した物理量をもらい、順圧モード用のタイムステップ ( $\Delta t_r$ ) を用いて、傾圧モードの  $n+1$  ステップ目 ( $t = t_{n+1}$ ) まで時間積分を進め、その間の平均量を傾圧モードの  $n$  ステップ目にあたる値として返す（図 5.3）。

移流項などがない線形の重力波を解く場合には、安定かつ経済的な Euler forward-backward スキームが存在する (Meisinger and Arakawa, 1976)。これは、連続の式と運動方程式のいずれかを先に解き、先に求まっ

た値を用いて残りを式を解くという手順で時間積分を行うスキームである。重力波問題ではこのスキームは、leap-frog に比べて、2倍の時間ステップに対して安定中立であることがわかっている。MRI.COM ではまず、連続の式を用いて海面高度を求め、その結果を圧力傾度項に用いて運動方程式を解く。

Killworth et al.(1991) は潮汐等を扱う場合以外は Euler backward スキーム (松野スキーム) を用いることを勧めている。Euler backward スキームは特に高周波モードを抑制するので安定であるが、一つの順圧タイムステップにたいして、連続の式及び運動方程式をそれぞれ2回計算する必要があるため、計算負荷が増大する。MRI.COM では後で述べるように、順圧タイムステップで求められた値に time filter を施したものをを用いているため、Euler forward-backward スキームでも十分安定な解を得ることができる<sup>‡</sup>。

連続の式 (5.4) の差分表現は

$$\frac{(\eta'_{i,j} - \eta_{i,j})}{\Delta t_{tr}} + \frac{1}{(h_{\mu} h_{\psi})_{i,j}} \left[ (\delta_{\mu} \overline{h_{\psi} U^{\psi}})_{i,j} + (\delta_{\psi} \overline{h_{\mu} V^{\mu}})_{i,j} \right] = (P - E)_{i,j} \quad (5.5)$$

となる。以下差分式の添え字は T-点を基準としてつける。 $\eta_{i,j}, w_{i,j}$  は T-点にあり、 $U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$  は U-点 (T-点から見た場合  $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$  の場所) に存在する。

なお、差分オペレータの定義は以下のとおり。

$$\begin{aligned} \delta_{\mu} A_i &\equiv \frac{A_{i+\frac{1}{2}} - A_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta \mu_i}, & \delta_{\mu} A_{i+\frac{1}{2}} &\equiv \frac{A_{i+1} - A_i}{\Delta \mu_{i+\frac{1}{2}}}, \\ \overline{A_i^{\mu}} &\equiv \frac{A_{i+\frac{1}{2}} + A_{i-\frac{1}{2}}}{2}, & \overline{A_{i+\frac{1}{2}}^{\mu}} &\equiv \frac{A_{i+1} + A_i}{2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

$\psi$  についても同様である。

モデル内では、上式に T-点の格子面積 ( $\Delta S_T$ ) を掛けた形のものを計算している。

$$\begin{aligned} (\eta'_{i,j} - \eta_{i,j}) \cdot \Delta S_{T,i,j} &= \Delta t_{tr} \cdot \{ (P - E)_{i,j} \cdot \Delta S_{T,i,j} \\ &\quad - (\Delta y_{i+\frac{1}{2},j} \overline{U^{\psi}}_{i+\frac{1}{2},j} - \Delta y_{i-\frac{1}{2},j} \overline{U^{\psi}}_{i-\frac{1}{2},j}) \\ &\quad - (\Delta x_{i,j+\frac{1}{2}} \overline{V^{\mu}}_{i,j+\frac{1}{2}} - \Delta x_{i,j-\frac{1}{2}} \overline{V^{\mu}}_{i,j-\frac{1}{2}}) \} \end{aligned} \quad (5.7)$$

各種オペレータの定義は前節と同様。この式を用いて新しい海面高度  $\eta'_{i,j}$  を求める。

続いて運動方程式 (5.2), (5.3) を解く。コリオリ項にセミインプリシットスキームを用いることにより、時間間隔を長くとることができる。

差分表現は、

$$\begin{aligned} \frac{(U'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})}{\Delta t_{tr}} &= - \frac{f(V'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})}{2} \\ &\quad - \frac{g(H_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \overline{\eta^{\mu,\psi}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})}{(h_{\mu})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \delta_{\mu} \overline{\eta^{\psi}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + X_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{(V'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})}{\Delta t_{tr}} &= - \frac{f(U'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})}{2} \\ &\quad - \frac{g(H_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \overline{\eta^{\mu,\psi}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})}{(h_{\psi})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \delta_{\psi} \overline{\eta^{\mu}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + Y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

<sup>‡</sup>Euler backward スキームを順圧の時間発展に適用するオプションも存在する (FSEB)。

第 5 章 自由表面方程式

となるが、これらは  $U'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, V'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$  について、代数的に解く；

右辺を  $GX$ 、 $GY$  とおいて、両辺に  $\Delta t_{tr}$  を掛けて

$$(U'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) - \frac{f\Delta t_{tr}}{2}(V'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) = \Delta t_{tr}GX_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \quad (5.10)$$

$$(V'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) + \frac{f\Delta t_{tr}}{2}(U'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) = \Delta t_{tr}GY_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \quad (5.11)$$

$$U'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \frac{f\Delta t_{tr}}{2}V'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{f\Delta t_{tr}}{2}V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \Delta t_{tr}GX_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

$$V'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{f\Delta t_{tr}}{2}U'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \frac{f\Delta t_{tr}}{2}U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \Delta t_{tr}GY_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \quad (5.13)$$

上式の右辺を  $RX$ 、 $RY$  とおくと、

$$U'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left\{ RX_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{f\Delta t_{tr}}{2}RY_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right\} / \left\{ 1 + \left( \frac{f\Delta t_{tr}}{2} \right)^2 \right\} \quad (5.14)$$

$$V'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left\{ RY_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \frac{f\Delta t_{tr}}{2}RX_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right\} / \left\{ 1 + \left( \frac{f\Delta t_{tr}}{2} \right)^2 \right\} \quad (5.15)$$

となる。

こうして求めた各時刻の  $\eta$ 、 $U$ 、 $V$  を  $[t_{n-1}, t_{n+1}]$  で平均して、 $t = t_n$  の値とする。図 5.3 からわかるように傾圧モード  $[t_{n-1}, t_{n+1}]$  の間に順圧モードは  $2 \times \Delta t / \Delta t_{tr}$  回あるので、時刻  $t = t_n$  を中心とした  $2 \times \Delta t / \Delta t_{tr} + 1$  個の平均を  $t = t_n$  の値とすることになる。ただし、本来必要であるのは  $t = t_n$  の値だけなので、計算の整合性という観点からは、このように  $t = t_{n+1}$  まで余分に計算をして平均をとる必要はなく、順圧モードを  $t = t_n$  まで計算し、その値を用いてもよい。このほうが計算コストは当然低いが、標準の設定で平均をとるのは、このような時間平均操作 (time-filter) を施すことで、経験上計算が安定となるからである。この time-filter は、パラメーター `ntflt` を設定することで調節することもできる。`ntflt` は time-filter を施さない場合に対して、どれだけ余分に順圧モード計算し、平均操作を行うかを表す値である。`ntflt` を  $\Delta t / \Delta t_{tr}$  と等しく置けば、標準と同じく余分に  $\Delta t / \Delta t_{tr}$  回計算し  $2 \times \Delta t / \Delta t_{tr} + 1$  個の平均をとる。いちいち計算して値を代入しなくとも、`ntflt = -1` と置くか、`namelist` で指定をしない場合には標準の設定となる。`ntflt = 0` とおけば time-filter をかけないことになる。 $0 < \text{ntflt} < \Delta t / \Delta t_{tr}$  の値を設定すると、 $2 \times \text{ntflt} + 1$  個の平均をとることになる。特に気にしない場合は、標準の設定を推奨する。

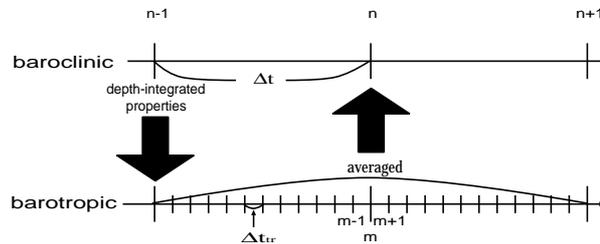


図 5.3: 時間積分の仕組み

サブルーチン `SURFCE` では、これを用いて、一層目の体積と各物理量 (次節)、海面昇降に伴う質量フラックスを求めるところまで行なっている。海面昇降に伴う質量フラックス (モデル内の変数名 `WS`) は、 $T$ -点で定義され、蒸発・降水の影響を除いた連続の式を積分して得られる。つまり、

$$\begin{aligned}
WS_{i,j} &= w_{i,j} \cdot \Delta S_{T_{i,j}} \\
&= -\Delta t \cdot \left( \Delta y_{i+\frac{1}{2},j} \bar{U}_{i+\frac{1}{2},j}^\psi - \Delta y_{i-\frac{1}{2},j} \bar{U}_{i-\frac{1}{2},j}^\psi \right. \\
&\quad \left. + \Delta x_{i,j+\frac{1}{2}} \bar{V}_{i,j+\frac{1}{2}}^\mu - \Delta x_{i,j-\frac{1}{2}} \bar{V}_{i,j-\frac{1}{2}}^\mu \right)
\end{aligned}$$

この連続の式と海面における鉛直流の関係については後ほど述べる。

## 5.3 一層目の各物理量の予報

### 5.3.1 標準スキーム

運動量や水温・塩分の移流、及び拡散（粘性）には、いわゆるフラックス型を用い、その収支を格子箱の体積で割ることで各物理量の変化を予報している。rigid-lid 近似とは異なり、自由表面にした場合、前のタイムステップと新しいタイムステップで、一層目の格子箱の体積は時間変化する。そのため、一層目の東西・南北流速、水温・塩分については、直接、それらの物理量を求めるのではなく、（物理量）×（格子体積）の収支を前のタイムステップの厚さをつかって、フラックス型の形で時間発展させ、新たに定義した配列（UV1A, VV1A, TV1A, SV1A）に一旦格納しておく。サブルーチン SURFCE で、新しいタイムステップにおける一層目の体積（VOLT1）を求めた段階で、UV1A, VV1A, TV1A, SV1A を体積 VOLT1 で割り、新しいタイムステップにおける各物理量の値とする。このようにした場合、フラックス型で表されているので、少なくとも全体での物理量の積分量は保存する。ただし、次に述べるように局所的に必ずしも保存しない。leap-frog スキームを用いる場合の水温を例にとると、

$$TV1B = V_{old} \cdot T_{old}$$

$$TV1A = TV1B + \text{その層に入っていく物理量フラックスの収支}$$

$$T_{new} = TV1A / V_{new}$$

$$TV1 = TV1A, TV1B = TV1$$

MRI.COM では、風応力や水温・塩分のリストア条件など、一層目の格子箱全体に働かせるような（体積力）境界条件に対しても、フラックス型の境界条件を用いているが、自由表面を用いた場合と rigid-lid を用いた場合とでフラックスが同量となるように、コーディングしている。

海面の風応力（運動量フラックス）は  $(\tau_\mu, \tau_\psi)$  であるので、一層目に働く力は、

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{(\tau_\mu, \tau_\psi)}{\Delta z_1 + \eta} \quad (5.16)$$

となる。この結果、層厚が薄いと加速が大きくなる。

水温・塩分のリストア条件を用いたときには、熱・塩分フラックスは

$$F_T = -\frac{1}{\gamma} (T - T^*) \Delta z_1, \quad \left. \frac{dT}{dt} \right|_{k=1} = \frac{F_T}{\Delta z_1 + \eta} \quad (5.17)$$

$$F_S = -\frac{1}{\gamma_s} (S - S^*) \Delta z_1, \quad \left. \frac{dS}{dt} \right|_{k=1} = \frac{F_S}{\Delta z_1 + \eta} \quad (5.18)$$

## 第5章 自由表面方程式

とする。この結果、層厚が薄い（一層目の体積が小さい）と観測値への緩和が強くなる。  
なお、 $\Delta z_1$  はあらかじめ与えた一層目の層厚である。

### 5.3.2 局所的な保存を考慮するスキーム (オプション FSMOM)

標準のスキームでは、傾圧ステップの間の海面高度の増分、傾圧流量の収束、および  $P-E$  との間で

$$\frac{\eta^{n+1} - \eta^{n-1}}{2\Delta t} + \nabla \cdot U^n \neq P - E \quad (5.19)$$

であり、一般に等号は成立しない。というのは、 $\eta^{n+1}$  は  $t_n$  から、 $U^n$  は  $t_{n-1}$  から始まる傾圧サブサイクルの各ステップの平均値としてそれぞれ求められるからである。(5.19) の等号が成立しないということは、すなわち水温・塩分の移流に用いる流速の収束と海面高度の変化率との間に不整合があるということである。例えば、水温、塩分一様な状態から出発して、熱、淡水フラックスがゼロの状態でも時間積分しても、海面高度の変動があれば、必ずしも一様な状態が維持されない<sup>§</sup>。

この場合、 $\eta^{n+1}$  とは別に

$$\frac{\hat{\eta}^{n+1} - \eta^{n-1}}{2\Delta t} + \nabla \cdot U^n = P - E \quad (5.20)$$

を満たす  $\hat{\eta}^{n+1}$  を求め、水温・塩分の一層目の値は  $\hat{\eta}^{n+1}$  に基づいて決める。こうすることにより、水温・塩分の移流に用いる流速の収束と海面高度の変化率の間の不整合はなくなり、前述の例でも一様性は保たれる。但し、一層目の格子体積を計算するのに用いる海面高度は  $\hat{\eta}^{n+1}$  ではなく、モデルの予報変数としての  $\eta^{n+1}$  であるため、水温・塩分のモデル全体に亘る積分値は保存されない。

## 5.4 $\sigma$ -layer モデルの導入

ここでは自由表面モデルの自然な拡張として、海表面付近を  $\sigma$ -layer とした場合の定式化を行う<sup>¶</sup>。MRI.COM の自由表面のコードが運動方程式もトレーサーの式も、完全なフラックス型で書いてあるため、 $\sigma$ -layer を導入した場合においても、解き方は一層の自由表面スキームの扱いとほとんど変わらず、一層目の各物理量の予報で行った手順を  $\sigma$ -layer の数だけ繰り返すことになる。

MRI.COM の自由表面スキームではオプション FREESURFACE を設定した段階で  $\sigma$ -layer モデルが自動的に導入される。具体的には、configure.in で鉛直層の総数 km を指定した後に  $\sigma$ -layer の層の数、ksgm を指定する。ksgm の数は当然総数 km 以下で有り、また、表面から ksgm までは同じ地形である必要がある。(海の局所的な層数が ksgm より少なくてはいけない。)  $\sigma$ -layer モデルを用いない場合は、ksgm=1 と設定すれば、上で述べた自由表面モデルと一致する。

### 5.4.1 $\sigma$ -layer 導入の準備

平均的な海面高度を  $z=0$  として、海面高度を  $z = \eta(\mu, \psi, t)$  であらわす。ある深さ  $z = -H (< 0)$  に対して、海面とこの深さとの間の厚さで規格化された鉛直座標

$$\sigma = \frac{z - \eta}{H + \eta} \quad (5.21)$$

<sup>§</sup>例外として、傾圧ステップと傾圧ステップのタイムステップを同じにして、さらに傾圧ステップのタイムフィルターを施さなかった場合 (nfft=0) には、水温、塩分一様な状態から出発して、熱、淡水フラックスがゼロの状態でも時間積分すれば、海面高度の変動があっても、一様な状態が維持される。これは実用的な設定ではないが、モデルのチェック段階では有用である。

<sup>¶</sup> $\sigma$ -layer の導入及びこの節の表現は COCO 及びそのマニュアルを参考にした。

を定義する ( $-1 < \sigma < 0$ )。  $z \leq -H$  においてはふつうの  $z$  座標である (図 5.1 参照)。  $z = \eta$  では  $\sigma = 0$  であり、  $z = -H$  では  $\sigma = -1$  である。  $\sigma$ -座標の定義には任意性があるが、ここでは Princeton Ocean Model (POM) に準拠した。以後、  $D \equiv H + \eta$  という形が数多く現われるが、これが  $\sigma$  layer の深さにあたる。また  $Dd\sigma = (\eta + H)d\sigma$  が  $\sigma$ -layer においてモデルのなかで  $dz$  として扱われているものである。(  $dz$  は時間変化する。)  $H$  が可変の場合のいわゆる一般の  $\sigma$ -layer の導出を行うことも可能であるが、ここでは、  $H$  は一定とする。

方程式の鉛直座標を  $\sigma$  に変換することを考える。ここでは鉛直座標に  $z$  を用いた座標系を  $(\mu^*, \psi^*, z^*, t^*)$  で表し、鉛直座標系に  $\sigma$  を用いた座標系を  $(\mu, \psi, \sigma, t)$  で表して、鉛直座標以外も区別しておく。座標変換を表す関係式は

$$\mu = \mu^*, \psi = \psi^*, \sigma = \frac{z^* - \eta}{H + \eta}, t = t^* \quad (5.22)$$

微分量の変換は

$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial \mu^*} = \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} - \frac{1 + \sigma}{D} \frac{\partial \eta}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial \psi^*} = \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} - \frac{1 + \sigma}{D} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial z^*} = \frac{1}{D} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial t^*} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{1 + \sigma}{D} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (5.26)$$

Lagrange 微分の変換は

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^*}{dt^*} &= \frac{\partial \alpha^*}{\partial t^*} + \frac{u^*}{h_\mu} \frac{\partial \alpha^*}{\partial \mu^*} + \frac{v^*}{h_\psi} \frac{\partial \alpha^*}{\partial \psi^*} + w^* \frac{\partial \alpha^*}{\partial z^*} \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{u}{h_\mu} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} + \frac{v}{h_\psi} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} + \frac{w^*}{D} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} - \frac{1 + \sigma}{D} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \left( \frac{u}{h_\mu} \frac{\partial \eta}{\partial \mu} + \frac{v}{h_\psi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

ここで  $\omega$  を

$$\omega \equiv \frac{d\sigma}{dt^*} = \frac{w^*}{D} - \frac{1 + \sigma}{D} \left( \frac{u}{h_\mu} \frac{\partial \eta}{\partial \mu} + \frac{v}{h_\psi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \quad (5.28)$$

と定義すると、Lagrange 微分の変換は

$$\frac{d\alpha^*}{dt^*} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{u}{h_\mu} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} + \frac{v}{h_\psi} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} + \omega \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \equiv \frac{d\alpha}{dt} \quad (5.29)$$

となり、  $z$  座標の Lagrange 微分と同様な形に変形することができる。

モデルのコードでは、  $\omega$  を直接求めることは行わず、

$$\omega \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} = D\omega \frac{\partial \alpha}{D\partial \sigma} \quad (5.30)$$

として、  $D\omega$ ,  $Dd\sigma$  を求めて、それぞれモデル変数  $w1w1$ ,  $dz$  などに代入している。(次元は同じで、大きさも、  $z$ -座標モデルの場合の相当する量とほぼ等しい。)

## 5.4.2 運動方程式、連続の式、トレーサーの予報式

### a. 連続の式

$\sigma$ -layer での連続の式は

$$\frac{1}{h_\mu h_\psi} \left\{ \frac{\partial (h_\psi u)}{\partial \mu} + \frac{\partial (h_\mu v)}{\partial \psi} \right\} + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \frac{1}{D} \left( \frac{u}{h_\mu} \frac{\partial \eta}{\partial \mu} + \frac{v}{h_\psi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.31)$$

## 第5章 自由表面方程式

である。この式は flux form でより簡単な形に書き直すことができる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{h_\mu h_\psi} \left\{ \frac{\partial (h_\psi u D)}{\partial \mu} + \frac{\partial (h_\mu v D)}{\partial \psi} \right\} + D \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = 0 \quad (5.32)$$

モデルでは、この式を用いて上から  $D\omega$  を求め、 $\sigma$ -layer 内の  $w(w_{l+1})$  に代入している。

### b. 移流項

フラックス型の移流項  $\mathcal{A}(\alpha D)$  は

$$\mathcal{A}(\alpha D) = \frac{1}{h_\mu h_\psi} \left\{ \frac{\partial (h_\psi u \alpha D)}{\partial \mu} + \frac{\partial (h_\mu v \alpha D)}{\partial \psi} \right\} + D \frac{\partial (\omega \alpha)}{\partial \sigma} \quad (5.33)$$

モデル内では単位水平面積あたりの移流フラックスの収束発散を計算している。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha D d\sigma) &= \frac{1}{h_\mu h_\psi} \left\{ \frac{\partial (h_\psi u \alpha D d\sigma)}{\partial \mu} + \frac{\partial (h_\mu v \alpha D d\sigma)}{\partial \psi} \right\} \\ &\quad + (\alpha D \omega)_{\text{upper}} - (\alpha D \omega)_{\text{lower}} \end{aligned} \quad (5.34)$$

$Dd\sigma \rightarrow dz$ ,  $D\omega \rightarrow w$  と置き換えると、1層の自由表面の場合と全く変わらない。

### c. 圧力勾配

静水圧の方程式は

$$\frac{1}{D} \frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\rho g \quad (5.35)$$

であるので、海面での大気圧を無視すれば、 $\sigma$ -layer における圧力は

$$p(\sigma) = g \int_\sigma^0 D \rho d\sigma' = gD \int_\sigma^0 \rho d\sigma' \quad (5.36)$$

となる。 $\sigma$ -layer における水平勾配は

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*}{\partial \mu^*} &= \frac{\partial p}{\partial \mu} - \frac{1+\sigma}{D} \frac{\partial \eta}{\partial \mu} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \\ &= \left[ g \frac{\partial \eta}{\partial \mu} \int_\sigma^0 \rho d\sigma' + gD \int_\sigma^0 \frac{\partial \rho}{\partial \mu} d\sigma' \right] - \frac{1+\sigma}{D} \frac{\partial \eta}{\partial \mu} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \\ &= \left[ g \frac{\partial \eta}{\partial \mu} \int_\sigma^0 \rho d\sigma' + gD \int_\sigma^0 \frac{\partial \rho}{\partial \mu} d\sigma' \right] + (1+\sigma) \frac{\partial \eta}{\partial \mu} \rho g \\ &= g \frac{\partial \eta}{\partial \mu} \left[ \int_\sigma^0 \rho d\sigma' + (1+\sigma)\rho \right] + gD \int_\sigma^0 \frac{\partial \rho}{\partial \mu} d\sigma' \end{aligned} \quad (5.37)$$

右辺第二項は baroclinic の成分に相当するもので、 $Dd\sigma \rightarrow dz$  と置き換えると、元の形と全く変わらない。右辺第一項のうち、 $\left[ \int_\sigma^0 \rho d\sigma' + (1+\sigma)\rho \right]$  は、 $\sigma=0$  では海面の密度であり、 $\sigma=-1$  では、 $\sigma$ -layer 全体の平均密度である。ここでは

$$\left[ \int_\sigma^0 \rho d\sigma' + (1+\sigma)\rho \right] \Rightarrow \rho_0 \quad (5.38)$$

と近似をする。また、このようにした場合に限り、 $\sigma$ -layer の層の数が一層しかなかった時に、Killworth et al. (1991) などの自由表面モデルにおける、海面圧力の扱いと等しくなる。

### d. 速度およびトレーサーの時間発展

(a-c) に加え、粘性・拡散などの寄与を求めることで速度およびトレーサーの時間発展を行う。粘性、水平

拡散は、 $\sigma$ -layer 内では  $\sigma$ -layer に沿った拡散ということになる。MRI.COM 自由表面モデルでは、もともと第 1 層目の速度やトレーサーの予報にそれらの密度ではなく、物理量に第 1 層目の体積をかけたもの、例えばポテンシャル温度でいえば  $tv1 \equiv t1 * tvol1$  の時間発展を計算している。 $\sigma$ -layer への変更は、結局  $tv1$  の計算を一層に限るのではなく、 $\sigma$ -layer 分の数だけ拡張したことにほぼ相当する。水平面積は時間変化しないので、以下は単位水平面積あたりの式を示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [TD] = & -\frac{1}{h_\mu h_\psi} \left\{ \frac{\partial(h_\psi u TD)}{\partial \mu} + \frac{\partial(h_\mu v TD)}{\partial \psi} \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial \sigma} [\omega TD] + D\mathcal{D}(T) \end{aligned} \quad (5.39)$$

### 5.4.3 $\sigma$ -layer 間でのトレーサーの再配分

海面から水フラックスが外力として加わると、サブルーチン SURFACE において  $\sigma$ -layer 全体に、水フラックス ( $F_W$  とする) を加えた後も層厚の比率が変わらないように、もともとの  $\sigma$ -layer の厚さに比例して配分される。しかし、本来ならば第 1 層目だけが水フラックスの影響を受け塩分が変動するはずのものが、この操作により  $\sigma$ -layer 全体に水フラックスによる塩分の変動が現われることになる。また、体積は  $\sigma$ -layer 全体で変化しているのに対して、相当する温度フラックス (第 1 層目と同じ温度  $\times$  海面から出入りする水フラックス) は第 1 層目にのみ加えられているため、第 1 層目のみが過大な熱量を受けるまたは失うことになる。これらの問題を修正するために、水フラックスの影響を考慮して  $\sigma$ -layer の間でトレーサーの再配分を行う操作をサブルーチン TRACER の初頭で行う。

$\sigma$  レベルは全部で  $K$  あるとする。切り直しの前の段階での海面高度、温度、塩分をそれぞれ  $\eta^{n+1(\text{old})}$ ,  $T^{n+1(\text{old})}$ ,  $S^{n+1(\text{old})}$  と表しておく。 $\delta\eta = -2\Delta t F_W$  とおくと、海面を通しての淡水の出入りによって海面高度は

$$\eta^{n+1} = \eta^{n+1(\text{old})} + \delta\eta \quad (5.40)$$

となる。 $\delta\eta > 0$  の時には  $z$  座標で見たときの第  $k$  層の下端が、

$$\delta z_k^B = \left( 1 - \sum_{l=1}^k \Delta\sigma_l \right) \delta\eta \quad (5.41)$$

だけ上がり、上端が

$$\delta z_k^T = \left( 1 - \sum_{l=1}^{k-1} \Delta\sigma_l \right) \delta\eta \quad (5.42)$$

だけ上がる ( $\delta z_k^T = \delta z_{k-1}^B$ )。従って、 $\sigma$  レベルを切り直した後に、水フラックスで上下した各  $\sigma$ -layer 間でフラックスのやりとりをおこなう。

$$S_k^{n+1} (\eta^{n+1} + H) \Delta\sigma_k = S_k^{n+1(\text{old})} (\eta^{n+1(\text{old})} + H) \Delta\sigma_k - S_k^{n+1(\text{old})} \delta z_k^B + S_{k-1}^{n+1(\text{old})} \delta z_k^T \quad (5.43)$$

温度の場合の熱フラックスに対する操作もほぼ同じである。

実際の実行に当たっては、サブルーチン TRACER の初頭で、トレーサーの時間発展方程式を解く前に TV1A に TV1B を代入した後、TV1A に修正分のフラックスを足し引きすることで上の操作を行う。

## References

- Killworth, P. D., D. Stainforth, D. J. Webb, and S. M. Paterson, 1991: The Development of a Free-Surface Bryan-Cox-Semtner Ocean Model., *J. Phys. Oceanogr.*, **31**, 1333–1348.

第 5 章 自由表面方程式

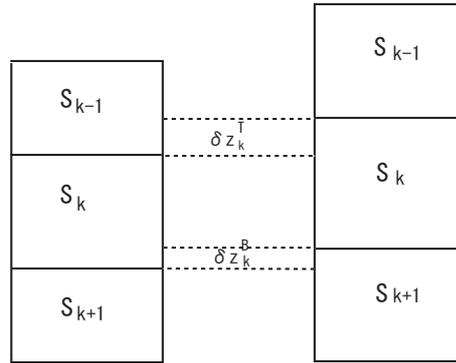


図 5.4: 再配分の前後の図

Meisinger, F., and A. Arakawa 1976: Numerical methods used in atmospheric models, *GARP Publications Series*, 17, p65.