

第4章 順圧渦度方程式

本章では rigid-lid 近似を用いて順圧流線関数を計算する方法を説明する。

解くべき順圧渦度方程式は (1.71) であり、1.2.1 で述べたように Kamenkovich の方法により $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ を求め、時間積分して Ψ を求める。ここでは、この手続きを数値的にどのように行なうかを述べる。

4.1 非斉次解; サブルーチン `rlxitr`

非斉次解は、大陸と全ての島の内部と岸で $\Psi = 0$ という境界条件の下で Poisson 方程式を解いた解である。まず、(1.71) のコリオリ項を右辺に移項して、左辺を差分化し、

$$\Delta \mu_i \Delta \psi_j \left[\overline{\delta_\mu \left(\frac{1}{H} \frac{h_\psi}{h_\mu} \overline{\delta_\mu \Phi^\psi} \right)^\psi} + \overline{\delta_\psi \left(\frac{1}{H} \frac{h_\mu}{h_\psi} \overline{\delta_\psi \Phi^\mu} \right)^\mu} \right] = Z_{ij} \quad (4.1)$$

とする。ここに、 $\Phi \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ とおいた。右辺 Z_{ij} はサブルーチン `CLINIC` で計算しており、既知である。差分オペレータの定義は以下のとおり。

$$\begin{aligned} \delta_\mu A_i &\equiv \frac{A_{i+\frac{1}{2}} - A_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta \mu_i}, & \delta_\mu A_{i+\frac{1}{2}} &\equiv \frac{A_{i+1} - A_i}{\Delta \mu_{i+\frac{1}{2}}}, \\ \overline{A_i}^\mu &\equiv \frac{A_{i+\frac{1}{2}} + A_{i-\frac{1}{2}}}{2}, & \overline{A_{i+\frac{1}{2}}}^\mu &\equiv \frac{A_{i+1} + A_i}{2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

ψ についても同様である。(4.1) を

$$\begin{aligned} &P_{1ij} \Phi_{i+1,j+1} + P_{2ij} \Phi_{i-1,j+1} + P_{3ij} \Phi_{i-1,j-1} + P_{4ij} \Phi_{i+1,j-1} \\ + &Q_{1ij} \Phi_{i,j+1} + Q_{2ij} \Phi_{i,j-1} + Q_{3ij} \Phi_{i+1,j} + Q_{4ij} \Phi_{i-1,j} - A_{0ij} \Phi_{ij} = Z_{ij} \end{aligned} \quad (4.3)$$

のように書くと、

$$\begin{aligned} P_{1ij} &= P_{\mu i,j} \Delta \mu_i + P_{\psi i,j} \Delta \psi_j \\ P_{2ij} &= P_{\mu i-1,j} \Delta \mu_i + P_{\psi i-1,j} \Delta \psi_j \\ P_{3ij} &= P_{\mu i-1,j-1} \Delta \mu_i + P_{\psi i-1,j-1} \Delta \psi_j \\ P_{4ij} &= P_{\mu i,j-1} \Delta \mu_i + P_{\psi i,j-1} \Delta \psi_j \\ Q_{1ij} &= (P_{\mu i,j} + P_{\mu i-1,j}) \Delta \mu_i - (P_{\psi i,j} + P_{\psi i-1,j}) \Delta \psi_j \\ Q_{2ij} &= (P_{\mu i-1,j-1} + P_{\mu i,j-1}) \Delta \mu_i - (P_{\psi i-1,j-1} + P_{\psi i,j-1}) \Delta \psi_j \\ Q_{3ij} &= (P_{\psi i,j} + P_{\psi i,j-1}) \Delta \psi_j - (P_{\mu i,j} + P_{\mu i,j-1}) \Delta \mu_i \\ Q_{4ij} &= (P_{\psi i-1,j} + P_{\psi i-1,j-1}) \Delta \psi_j - (P_{\mu i-1,j} + P_{\mu i-1,j-1}) \Delta \mu_i \\ A_{0ij} &= P_{1ij} + P_{2ij} + P_{3ij} + P_{4ij} \end{aligned} \quad (4.4)$$

第4章 順圧渦度方程式

となる。ここに、

$$\begin{aligned} P_{\mu i,j} &= \frac{1}{4H_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Delta\psi_{j+\frac{1}{2}}} \frac{h_{\mu i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{h_{\psi i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \\ P_{\psi i,j} &= \frac{1}{4H_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Delta\mu_{i+\frac{1}{2}}} \frac{h_{\psi i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{h_{\mu i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

である。これらの係数は時間変化しないので、サブルーチン **RDBNDT** で一回だけ計算してメモリに格納しておく。あとは (4.3) を Φ_{ij} の連立一次方程式として解けばよい。方法はいくつかあるが、以下で述べるような反復法が一般的である。

Jacobi の方法と呼ばれる反復法は以下のようなものである。適当な初期推定値 (Φ^0 ; 前の時間ステップの値を使うことが多い) を与え、(4.3) に代入し、等号がなりたつように Φ_{ij}^0 を Φ_{ij}^1 に置き換える、という操作を各格子点について行ない Φ^1 を求める。この操作を推定値の変化が十分小さくなるまで繰り返す。つまり、 n 回目の推定値を用いたときの残差を

$$\begin{aligned} R_{ij}^n &= P_{1ij}\Phi_{i+1,j+1}^n + P_{2ij}\Phi_{i-1,j+1}^n + P_{3ij}\Phi_{i-1,j-1}^n + P_{4ij}\Phi_{i+1,j-1}^n \\ &+ Q_{1ij}\Phi_{i,j+1}^n + Q_{2ij}\Phi_{i,j-1}^n + Q_{3ij}\Phi_{i+1,j}^n + Q_{4ij}\Phi_{i-1,j}^n - A_{0ij}\Phi_{ij}^n - Z_{ij} \end{aligned} \quad (4.6)$$

とすると、次の推定値は

$$\Phi_{ij}^{n+1} = \Phi_{ij}^n + R_{ij}^n/A_{0ij} \quad (4.7)$$

である。 R_{ij}^n が十分小さくなった時点の推定値を解とする。

Jacobi の方法を改良して、残差を

$$\begin{aligned} R_{ij}^n &= P_{1ij}\Phi_{i+1,j+1}^n + P_{2ij}\Phi_{i-1,j+1}^n + P_{3ij}\Phi_{i-1,j-1}^n + P_{4ij}\Phi_{i+1,j-1}^n \\ &+ Q_{1ij}\Phi_{i,j+1}^n + Q_{2ij}\Phi_{i,j-1}^n + Q_{3ij}\Phi_{i+1,j}^n + Q_{4ij}\Phi_{i-1,j}^n - A_{0ij}\Phi_{ij}^n - Z_{ij} \end{aligned} \quad (4.8)$$

とする (つまり、 $(i=1, j=1), (i=2, j=1), \dots$ という順番に Φ の値を更新していったときに、既に更新されている格子点については、新しい推定値を用いる; 図 4.1) ことによって収束を速める方法を **Gauss-Seidel** 法と呼ぶ。

さらに、

$$\Phi_{ij}^{n+1} = \Phi_{ij}^n + \omega R_{ij}^n/A_{0ij} \quad (1 < \omega < 2) \quad (4.9)$$

のように、残差よりも少し大きな値を足すことによって収束が速まることが知られており、(4.8)(4.9) を用いた反復法を **Successive Over-Relaxation (SOR)** と呼ぶ。

SOR は収束は速いが、各格子点の計算を順番に行なう必要があり、並列計算やベクトル計算には不向きである。そこで、**MRI.COM** では 4 色法と呼ばれる方法を採用している。これは、まず i, j ともに奇数の格子点 (白ぬき) の Φ を更新し、次に i が偶数、 j が奇数の格子点 (タイル)、次に i が奇数、 j が偶数の格子点 (斜線)、最後に i, j ともに偶数の格子点 (点々)、という順番に更新していく方法である (図 4.2)。同じ色の格子点どうしは隣り合わないの、順番に計算しても並列に計算しても結果は変わらない。また、既に更新された色の格子点については新しい値を参照するので、**Jacobi** の方法よりは収束が速い。係数 ω は 1 より大きいものを用いる。

ω の値によって収束の速さは変化するが、**MRI.COM** では 500 時間ステップに 1 回サブルーチン **DETOVR** を呼んで、いくつかの係数を用いて実際に反復法で方程式を解き、反復回数が最小になる係数を採用するようにしている。

MRI.COM ではオプション **CONVCHK** をオンにしたときだけ収束判定を行ない、そうでないときは設定した回数だけ反復を行う。収束判定は

$$\text{Max}(|R|)/\text{Max}(|\Phi|) < \varepsilon \quad (4.10)$$

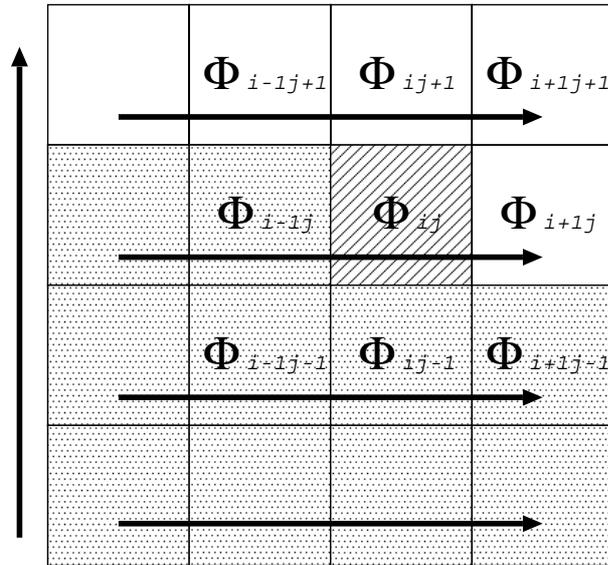


図 4.1: Gauss-Seidel 法:点々の部分は既に更新済で新しい値を参照できる

という条件で行なう。ただし、初めのうちは収束判定は行わず、前の時間ステップで収束に要した回数を記憶しておき、その回数に近付いたら収束判定をする。

4.2 島の取り扱い; サブルーチン relax

島の岸にあたる格子点はあらかじめ島ごとに求めておきファイルに格納しておく(図 4.3)。また、斉次解(図 4.4)と(1.83)の左辺の係数もあらかじめ計算しておき、ファイルに格納しておく。(1.83)の右辺を差分化すると、 l 番目の島について

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{M_l} [P_{1i_m j_m} \Phi_{i_m+1, j_m+1} + P_{2i_m j_m} \Phi_{i_m-1, j_m+1} + P_{3i_m j_m} \Phi_{i_m-1, j_m-1} + P_{4i_m j_m} \Phi_{i_m+1, j_m-1} \\
 & + Q_{1i_m j_m} \Phi_{i_m, j_m+1} + Q_{2i_m j_m} \Phi_{i_m, j_m-1} + Q_{3i_m j_m} \Phi_{i_m+1, j_m} + Q_{4i_m j_m} \Phi_{i_m-1, j_m} \\
 & - A_{0i_m j_m} \Phi_{i_m, j_m} - Z_{i_m j_m}]
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

となる。 i_m, j_m は l 番目の島の岸の格子点のうち m 番目の格子点の座標である。あとは 1 節に述べた方法で各島の斉次解の大きさを求め、非斉次解と足して Φ を求めればよい。

4.3 並列化の問題

メモリ分散型の並列計算機 (SR8000 のノード間並列化) を用いる場合、4 色法では各色の格子点の更新が終わるたびにプロセッサ間のデータ転送の必要が生じるため、並列化効率が非常に悪い。

Xie and Adams (1999) による Parallel SOR (PSOR) と、その改良である石井・栗原 (2002) の PSOR2 は、各プロセッサの担当領域の辺にあたる格子点のデータを先に計算して隣りのプロセッサに送ってしまい、送りながら内部の格子点を更新する、という方法で転送にかかる時間を減らしている。

今後、このような方法を MRI.COM に応用することで、rigid-lid でも効率的な計算ができる可能性がある。

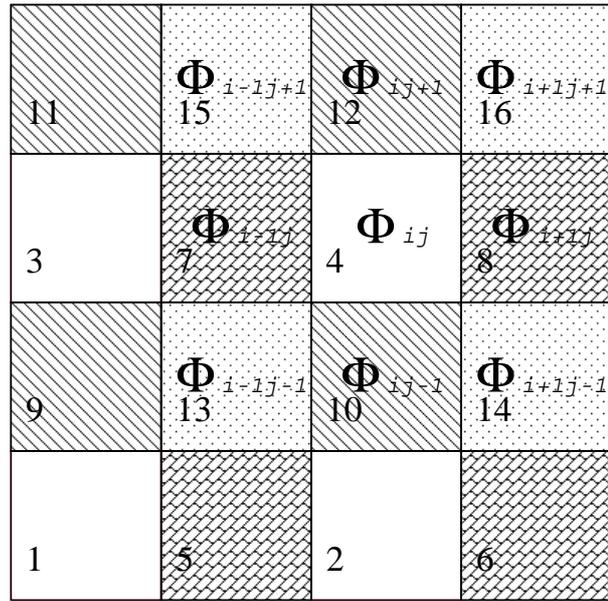


図 4.2: 4 色法 : 各格子左下の数字の順番で Φ を計算していく

References

- Xie, Dexuan, and Loyce Adams, 1999: New parallel SOR method by domain partitioning., *SIAM J. Sci. Comput.*, **20**, 2261-2281.
- 石井 正好, 栗原 和夫, 2002: Poisson 方程式の高速数値解法 — PSOR 法とマルチグリッド法の紹介 —, *天気*, **49**, 504-606.

4.3. 並列化の問題

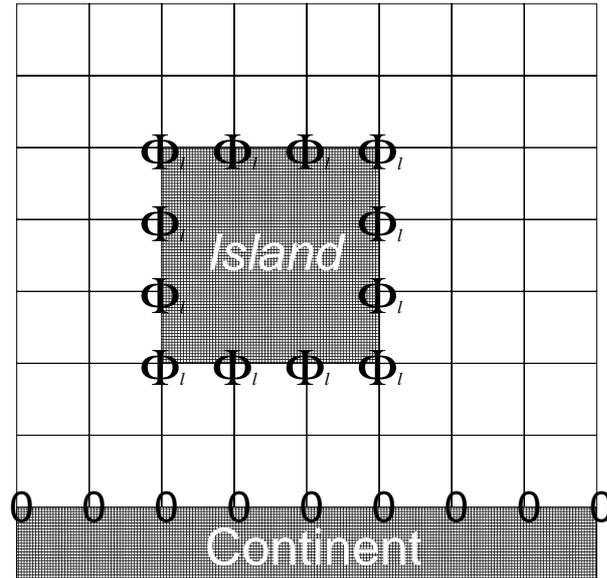


図 4.3: 島の岸の格子点

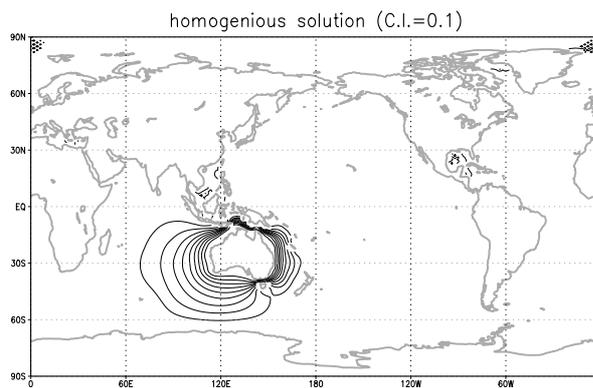


図 4.4: 斉次解の例

