第1章　支配方程式

本章では、大循環モデルで解く方程式（primitive equations）の定式化を行なう。実際にどのように解いているのかについては、4 章以降の各章を参照すること。

1.1　定式化

海洋大循環モデルは球面上で定式化する必要がある。歴史的には、緯度経度座標上で差分化が行われてきた。しかしながら、全球を対象とした計算を行おうとする場合、北極に特異点が残るという問題が生じる。また、85 度より高緯度の東西格子サイズは中低緯度と比較して 1 割以下になり、CFL condition[*] の制約から、時間 step を小さくとる必要が生じ、時間積分の効率に支障を来す。北極における特異点の問題を解決する簡便な方策としては、両極が陸上に乗るように極の軸をずらすという方法がある。この場合、コリオリ力の大きさを変更するだけで、緯度経度座標上で差分化したモデルをそのまま用いることができる。残念ながら、地球の中心に関する対称点が両方とも陸地である点は多くない[†]。極付近の海洋の格子サイズを大きくするためには、なるべく極付近の陸地が大きく、両極近傍に海洋の格子がないような場所を選びたい。しかしながら、最適なグリーンランドと南極（ロス海付近）を両極とする移動であっても、極から 5 度程度しか陸地として確保できない。また、この場合赤道が一直線に乗らないなどの問題も生じる[‡]。

これらの問題を解決するために、モデルを球面座標系ではなく、一般直交曲線座標上で構築し、状況に応じて最適な座標系を用いることにする。これにより、単に北極の問題が解決されるだけではなく、場合によっては特定の領域を意図的に細かくするという座標を用いることも可能となる。もちろん、球面座標系も直交座標の一種であるので、北極などの問題がない場合はこれを使うこともできる。以下、一般直交曲線座標上で定式化を行う。

1.1.1　一般直交曲線座標系でのベクトル・微分演算・運動方程式

まず、近似をしない一般直交曲線座標上で定式化する。定式化を行うにあたっては、一般直交曲線座標におけるベクトル微分・演算が必要となるので、それについて簡単に解説する。また、これにより運動方程式がもっとも影響を受けるので、この導出も行っておく。

任意の一般直交曲線座標系において、ある点の線要素ベクトルを以下のように表す。

$$\delta\mathbf{x} = h_\mu \delta\mu \mathbf{e}_\mu + h_\psi \delta\psi \mathbf{e}_\psi + h_r \delta r \mathbf{e}_r \tag{1.1}$$

基底ベクトル $\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_r$ は互いに直交する単位ベクトルであり、h_μ, h_ψ, h_r はスケール因子である。

関数 $A(\mu,\psi,r)$ の勾配は

$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_\mu}{h_\mu}\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{\mathbf{e}_\psi}{h_\psi}\frac{\partial}{\partial\psi} + \frac{\mathbf{e}_r}{h_r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{1.2}$$

[*] 流速を v, 格子サイズを Δx とした場合、時間ステップ, Δt, は $v\Delta t/\Delta x \leq 1$ を満たす必要がある。

[†] グリーンランドと南極、中国とアルゼンチン、カリマンタン島とコロンビア。

[‡] もっとも、十分格子サイズが細かければたとえ、格子配置にたいして斜めに赤道がとられたとしても、Kelvin 波などは物理法則通り赤道を通る。

とおくと、

$$\nabla A = \frac{\mathbf{e}_\mu}{h_\mu}\frac{\partial A}{\partial \mu} + \frac{\mathbf{e}_\psi}{h_\psi}\frac{\partial A}{\partial \psi} + \frac{\mathbf{e}_r}{h_r}\frac{\partial A}{\partial r} \tag{1.3}$$

となる。

ベクトル場 $\mathbf{A} = A_\mu \mathbf{e}_\mu + A_\psi \mathbf{e}_\psi + A_r \mathbf{e}_r$ の発散は

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_\mu h_\psi h_r}\left\{ \frac{\partial(h_\psi h_r A_\mu)}{\partial \mu} + \frac{\partial(h_r h_\mu A_\psi)}{\partial \psi} + \frac{\partial(h_\mu h_\psi A_r)}{\partial r} \right\} \tag{1.4}$$

curl$\mathbf{A}$ の r 成分は

$$\frac{1}{h_\mu h_\psi}\left\{ \frac{\partial(h_\psi A_\psi)}{\partial \mu} - \frac{\partial(h_\mu A_\mu)}{\partial \psi} \right\} \tag{1.5}$$

となる。また、速度の移流項にあらわれる形、$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{A}$ の μ 成分は次のように表される。ここで、$\mathbf{a}$ は任意のベクトル $(\mathbf{a} = a_\mu \mathbf{e}_\mu + a_\psi \mathbf{e}_\psi + a_r \mathbf{e}_r)$。

$$\mathbf{a}\cdot\nabla A_\mu + \frac{A_\psi}{h_\mu h_\psi}\left(a_\mu \frac{\partial h_\mu}{\partial \psi} - a_\psi \frac{\partial h_\psi}{\partial \mu} \right) + \frac{A_r}{h_r h_\mu}\left(a_\mu \frac{\partial h_\mu}{\partial r} - a_r \frac{\partial h_r}{\partial \mu} \right) \tag{1.6}$$

$\mathbf{a}\cdot\nabla A_\mu$ より後に現われる項がいわゆる運動方程式の移流によるメトリック項に相当するものである。

上に記したものが具体的に球座標 (λ, ϕ, r) でどのようになるかを以下に示す。緯度・経度座標系においては（地理座標）、λ を経度、ϕ を緯度、r を地球の中心からの距離として、$h_\lambda = r\cos\phi$、$h_\phi = r$、$h_r = 1$ である。

速度ベクトル $\mathbf{v}$ は

$$\mathbf{v} = u\mathbf{e}_\lambda + v\mathbf{e}_\phi + w\mathbf{e}_r \tag{1.7}$$

と表す。ただし、$\mathbf{e}_\lambda$、 $\mathbf{e}_\phi$、$\mathbf{e}_r$ はそれぞれ経度、緯度、鉛直方向の単位ベクトル。

また、 $(u, v, w) = (r\cos\phi\dot{\lambda}, r\dot{\phi}, \dot{r})$ である（$\cdot$ は時間微分）。関数 A の勾配は

$$\nabla A = \frac{\mathbf{e}_\lambda}{r\cos\phi}\frac{\partial A}{\partial \lambda} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r}\frac{\partial A}{\partial \phi} + \mathbf{e}_r\frac{\partial A}{\partial r} \tag{1.8}$$

ここで

$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_\lambda}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} \tag{1.9}$$

である。ベクトル $\mathbf{A} = A_\lambda\mathbf{e}_\lambda + A_\phi\mathbf{e}_\phi + A_r\mathbf{e}_r$ に関して、$\nabla\cdot\mathbf{A}$、curl$\mathbf{A}$ の r 成分、$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{A}$ の λ 成分などは、それぞれ以下のようになる。

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r\cos\phi}\left\{ \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial(\cos\phi A_\phi)}{\partial \phi} \right\} + \frac{\partial(r^2 A_r)}{r^2\partial r} \tag{1.10}$$

$$[\mathrm{curl}\mathbf{A}]_r = \frac{1}{r\cos\phi}\left\{ \frac{\partial A_\phi}{\partial \lambda} - \frac{\partial(\cos\phi A_\lambda)}{\partial \phi} \right\} \tag{1.11}$$

$$[(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{A}]_\lambda = \mathbf{a}\cdot\nabla A_\lambda - \frac{A_\phi a_\lambda \tan\phi}{r} + \frac{A_r a_\lambda}{r} \tag{1.12}$$

となる。球座標でメトリック項の中を展開して書き下すと、このように不規則な形をとり若干わかりにくくなる。

運動方程式導出の準備としてコリオリ力を求めておく。一般化座標 (μ, ψ, r) における地球の回転ベクトル、$\Omega = \Omega_\mu\mathbf{e}_\mu + \Omega_\psi\mathbf{e}_\psi + \Omega_r\mathbf{e}_r,$ と速度場、$\mathbf{v} = u\mathbf{e}_\mu + v\mathbf{e}_\psi + w\mathbf{e_r}$ が作り出すコリオリ力は、

$$2\Omega\times\mathbf{v} = (2\Omega_\psi w - 2\Omega_r v)\mathbf{e}_\mu + (2\Omega_r u - 2\Omega_\mu w)\mathbf{e}_\psi + (2\Omega_\mu v - 2\Omega_\psi u)\mathbf{e_r} \tag{1.13}$$

である。以後、$f_\mu = 2\Omega_\mu, f_\psi = 2\Omega_\psi, f = f_r = 2\Omega_r$ とおく。緯度経度座標系 (λ,ϕ,r) においては地球の回転ベクトル、$(\Omega_\lambda,\Omega_\phi,\Omega_r) = (0,\Omega\cos\phi,\Omega\sin\phi)$ である。

以上を用いて、ブシネスク近似を施した (重力項以外の密度 ρ を海水の平均的な密度 ρ_0 で置き換えた) 運動方程式を一般直交曲線座標において表現する。$u = h_\mu\dot{\mu}$、$v = h_\psi\dot{\psi}$、$w = h_r\dot{r}$ について

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla u + f_\psi w - fv = -\frac{1}{\rho_0 h_\mu}\frac{\partial P}{\partial \mu} - \frac{v}{h_\mu h_\psi}\left(\frac{\partial h_\mu}{\partial \psi}u - \frac{\partial h_\psi}{\partial \mu}v\right) - \frac{w}{h_r h_\mu}\left(\frac{\partial h_\mu}{\partial r}u - \frac{\partial h_r}{\partial \mu}w\right) + \mathscr{V}_\mu \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla v + fu - f_\mu w = -\frac{1}{\rho_0 h_\psi}\frac{\partial P}{\partial \psi} - \frac{w}{h_\psi h_r}\left(\frac{\partial h_\psi}{\partial r}v - \frac{\partial h_r}{\partial \psi}w\right) - \frac{u}{h_\mu h_\psi}\left(\frac{\partial h_\psi}{\partial \mu}v - \frac{\partial h_\mu}{\partial \psi}u\right) + \mathscr{V}_\psi \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla w + f_\mu v - f_\psi u = -\frac{1}{\rho_0 h_r}\frac{\partial P}{\partial r} - g\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{u}{h_r h_\mu}\left(\frac{\partial h_r}{\partial \mu}w - \frac{\partial h_\mu}{\partial r}u\right) - \frac{v}{h_\psi h_r}\left(\frac{\partial h_r}{\partial \psi}w - \frac{\partial h_r}{\partial r}v\right) + \mathscr{V}_r \tag{1.16}$$

となる。ここで P は圧力、$\mathscr{V}$ は粘性項、g は重力加速度である。ただし、重力が r の負の方向にかかる座標を採用した。

1.1.2　基本方程式 (海洋モデルにおける近似)

前の section で導出された式は non-hydrostatic model、quasi-hydrostatic model などを組み立てる際に必要となる（ブシネスク近似を用いた）一般的な式である。

ここでは実際の MRI.COM のコードで使われている、上の式に近似を施した式を記す。まず、海洋を対象とする場合、鉛直方向の運動スケールが地球の表面（半径を a) にくらべて非常に小さい現象を扱うため、r を地球の半径 a で置き換え、地球の表面 (海面）からの変位を鉛直上向きにとり z とし、$\partial/\partial r$ を $\partial/\partial z$ で置き換える。また、上の近似をした場合に、角運動量を保存するため、w u,v の式に現われる w の寄与する項、及びに w の式のメトリック項、コリオリ力の f 以外の寄与を落とす (Phillips 1966) 。

また、更に以下の近似もあわせて行う。

鉛直方向の運動方程式においては

<u>**鉛直方向の運動方程式は静水圧平衡:**</u>

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \tag{1.17}$$

とする。

<u>**質量保存は、非圧縮流体の連続の式:**</u>

$$\mathscr{A}(1) = 0 \tag{1.18}$$

ここでの $\mathscr{A}$ は移流演算子であり、スカラー量 α について

$$\mathscr{A}(\alpha) = \frac{1}{h_\mu h_\psi}\left\{\frac{\partial(h_\psi u\alpha)}{\partial \mu} + \frac{\partial(h_\mu v\alpha)}{\partial \psi}\right\} + \frac{\partial(w\alpha)}{\partial z} \tag{1.19}$$

で定義される。

結局、運動方程式は以下のように表され、この式を差分化して MRI.COM で用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{1}{\rho_0 h_\mu}\frac{\partial P}{\partial \mu} - \mathscr{A}(u) - \frac{v}{h_\mu h_\psi}\left(\frac{\partial h_\mu}{\partial \psi}u - \frac{\partial h_\psi}{\partial \mu}v\right) + \mathscr{V}_u \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho_0 h_\psi}\frac{\partial P}{\partial \psi} - \mathscr{A}(v) - \frac{u}{h_\mu h_\psi}\left(\frac{\partial h_\psi}{\partial \mu}v - \frac{\partial h_\mu}{\partial \psi}u\right) + \mathscr{V}_v \tag{1.21}$$

ここで $\mathscr{V}$ は粘性項であり、以下のように動径方向と水平方向に分けて表現する。

$$
\begin{aligned}
\mathscr{V}_u &= \frac{1}{h_\psi^2}\frac{\partial}{h_\mu\partial\mu}\left(h_\psi^2 \nu_H D_T\right) + \frac{1}{h_\mu^2}\frac{\partial}{h_\psi\partial\psi}\left(h_\mu^2 \nu_H D_S\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_V \frac{\partial u}{\partial z}\right) &(1.22)\\
\mathscr{V}_v &= \frac{1}{h_\psi^2}\frac{\partial}{h_\mu\partial\mu}\left(h_\psi^2 \nu_H D_S\right) - \frac{1}{h_\mu^2}\frac{\partial}{h_\psi\partial\psi}\left(h_\mu^2 \nu_H D_T\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_V \frac{\partial v}{\partial z}\right) &(1.23)
\end{aligned}
$$

ここで、ν_H は水平方向の粘性係数、ν_V は鉛直方向の粘性係数、D_T, D_S はそれぞれ水平方向の tension, shear で

$$
\begin{aligned}
D_T &= h_\psi \frac{\partial}{h_\mu\partial\mu}\left(\frac{u}{h_\psi}\right) - h_\mu \frac{\partial}{h_\psi\partial\psi}\left(\frac{v}{h_\mu}\right) &(1.24)\\
D_S &= h_\mu \frac{\partial}{h_\psi\partial\psi}\left(\frac{u}{h_\mu}\right) + h_\psi \frac{\partial}{h_\mu\partial\mu}\left(\frac{v}{h_\psi}\right). &(1.25)
\end{aligned}
$$

粘性項のこのような定式化は Bryan(1969) から導かれ、また Smagorinsky(1963) とも一致する。ただし後者では係数も D_T, D_S に依存して変数となる ((6.2.2) 参照)。$h_\mu = 1, h_\psi = 1$ とすればデカルト座標であるが、この場合粘性項は、係数が定数の時、各速度成分ごとの Laplacian となることがわかる。

MRI.COM では、水平方向には Laplacian 型 ((1.22)-(1.25) の 2 階微分)、biharmonic 型 (4 階微分) のどちらかを選ぶことができ、鉛直方向には Laplacian 型を用いる。biharmonic 型の水平粘性を用いるときは上の水平 Laplacian 型の操作を 2 回繰り返す（粘性係数はもちろん変更し、符号は負とする)。

水温（実際には温位）と塩分に関しては移流拡散方程式:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= -\mathscr{A}(T) + \mathscr{D}(T) &(1.26)\\
\frac{\partial S}{\partial t} &= -\mathscr{A}(S) + \mathscr{D}(S) &(1.27)
\end{aligned}
$$

$\mathscr{D}$ は拡散演算子で、MRI.COM では、水平方向には Laplacian 型水平拡散、等密度面拡散、biharmonic 型拡散の中から選ぶことができる。鉛直方向には Laplacian 型を用いる。

Laplacian 型の水平拡散は以下のように表現される。

スカラー量 α の Laplacian は、(1.3),(1.4) から

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}(T) &= \frac{1}{h_\mu h_\psi}\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{h_\psi \kappa_H}{h_\mu}\frac{\partial T}{\partial\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{h_\mu \kappa_H}{h_\psi}\frac{\partial T}{\partial\psi}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa_V \frac{\partial T}{\partial z}\right) &(1.28)\\
\mathscr{D}(S) &= \frac{1}{h_\mu h_\psi}\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{h_\psi \kappa_H}{h_\mu}\frac{\partial S}{\partial\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{h_\mu \kappa_H}{h_\psi}\frac{\partial S}{\partial\psi}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa_V \frac{\partial S}{\partial z}\right) &(1.29)
\end{aligned}
$$

κ_H は水平方向の拡散係数、κ_V は鉛直方向の拡散係数である。Biharmonic 型の水平拡散は Laplacian operator を 2 回繰り返す（拡散係数は変更、符号は負)。

水平拡散の代わりに等密度面拡散を用いる時、任意のスカラー τ に対する移流拡散方程式は以下のようになる (Gent and McWillams, 1990)。ここでは等密度面を横切る diapycnal diffusion を考えない。

$$
\frac{D\tau}{Dt} + \nabla_H \cdot \left[\tau \frac{\partial}{\partial z}(\kappa_T \nabla_H \rho / \rho_z)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\tau \nabla_H \cdot (-\kappa_T \nabla_H \rho / \rho_z)\right] = \mathscr{D}(\tau) \qquad (1.30)
$$

ここで、右辺は

$$
\mathscr{D}(\tau) = \nabla \cdot (\kappa_I \mathbf{K} \nabla \tau) \qquad (1.31)
$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\rho_x^2+\rho_y^2+\rho_z^2}\begin{pmatrix} \rho_y^2+\rho_z^2 & -\rho_x\rho_y & -\rho_x\rho_z \\ -\rho_x\rho_y & \rho_x^2+\rho_z^2 & -\rho_y\rho_z \\ -\rho_x\rho_z & -\rho_y\rho_z & \rho_x^2+\rho_y^2 \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

$$= \frac{1}{1+(\rho_x/\rho_z)^2+(\rho_y/\rho_z)^2}\begin{pmatrix} 1+(\rho_y/\rho_z)^2 & -(\rho_x/\rho_z)(\rho_y/\rho_z) & -\rho_x/\rho_z \\ -(\rho_x/\rho_z)(\rho_y/\rho_z) & 1+(\rho_x/\rho_z)^2 & -\rho_y/\rho_z \\ -\rho_x/\rho_z & -\rho_y/\rho_z & (\rho_x/\rho_z)^2+(\rho_y/\rho_z)^2 \end{pmatrix}$$

で等密度面拡散を表し（見易さのため、表記をデカルト座標型に戻したが、添え字 x は $\partial/(h_\mu\partial\mu)$ を、y は $\partial/(h_\psi\partial\psi)$ を表す。)、κ_I は等密度面拡散係数である。

(1.30) の左辺の第 2、3 項は移流項と同じ形をしており、

$$u_T \equiv \frac{\partial}{\partial z}\Big(\kappa_T\frac{1}{h_\mu}\frac{\partial\rho}{\partial\mu}/\frac{\partial\rho}{\partial z}\Big) \tag{1.33}$$

$$v_T \equiv \frac{\partial}{\partial z}\Big(\kappa_T\frac{1}{h_\psi}\frac{\partial\rho}{\partial\psi}/\frac{\partial\rho}{\partial z}\Big) \tag{1.34}$$

$$w_T \equiv -\frac{1}{h_\mu h_\psi}\Big\{\frac{\partial}{\partial\mu}\Big(\kappa_T\frac{h_\psi}{h_\mu}\frac{\partial\rho}{\partial\mu}/\frac{\partial\rho}{\partial z}\Big)+\frac{\partial}{\partial\psi}\Big(\kappa_T\frac{h_\mu}{h_\psi}\frac{\partial\rho}{\partial\psi}/\frac{\partial\rho}{\partial z}\Big)\Big\} \tag{1.35}$$

を、ある密度の層厚の拡散に伴うトレーサーの移流速度とみなすことができる。κ_T は thickness diffusivity である。なお、これらは $\mathbf{A}$ を

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\rho_x/\rho_z \\ 0 & 0 & -\rho_y/\rho_z \\ \rho_x/\rho_z & \rho_y/\rho_z & 0 \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

とすることにより

$$\mathscr{G}(\tau) = \nabla\cdot(\kappa_T\mathbf{A}\nabla\tau) \tag{1.37}$$

と書くことができるので、前述の等密度面拡散テンソルから $\mathbf{A}$ を引くだけで計算することができる (Griffies 1998)。(1.30) は

$$\frac{D\tau}{Dt} = \nabla\cdot\{(\kappa_I\mathbf{K}-\kappa_T\mathbf{A})\nabla\tau\} \tag{1.38}$$

となる。

状態方程式:

海水の現場密度を求める式は水温・塩分・圧力の関数である。

$$\rho = \rho(T,S,P) \tag{1.39}$$

これについては、1.2.2 節で詳しく説明する。

1.1.3 境界条件

運動方程式

$z=0$;

海面からは風応力（海氷があるところでは海氷からの応力）が運動量フラックスとして入ってくる。

$$\nu_V\frac{\partial(u,v)}{\partial z} = \frac{(\tau_x,\tau_y)}{\rho_0} \tag{1.40}$$

モデル中では、 以下のように、風応力に相当する運動量が body-forcing の形で第一層目にかかることで、表現される。

$$\frac{(\tau_x, \tau_y)}{\rho_0 \Delta z_1} \tag{1.41}$$

ここで Δz_1 は一層目の層厚である。

τ_x、τ_y はそれぞれ、応力の東西、南北成分である。

$z = -H$(bottom);

海底では摩擦力が働く（応力の東西、南北成分をそれぞれ τ_x^b、τ_y^b とする）。

海底の流速ベクトルに対して、その大きさに比例し、$(\theta + \pi)$ だけ回転させた向きを持つような摩擦力が働くと考える（Weatherly 1972）。

$$(\tau_x^b, \tau_y^b) = -C_b \rho_0 \sqrt{u^2 + v^2}(u \cos\theta - v \sin\theta, v \cos\theta + u \sin\theta) \tag{1.42}$$

C_b は drag coefficient（無次元量）で 1.225×10^{-3}、θ は 10° を採用している。ただし、θ は北半球で正、南半球で負である。

側面の陸地境界では no slip 条件（$u = v = 0$）を用いる。

水温塩分方程式

海岸においては、

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \tag{1.43}$$

$$\frac{\partial S}{\partial n} = 0 \tag{1.44}$$

とし、熱と塩分の出入りはないとする（河川からの流出は海面の淡水フラックスとして扱う）。ここで、n は海岸に直行する成分である。

海面（$z = 0$）;

海面では、大気・海氷との熱や淡水、海氷との塩分のやりとりを考慮しなければならない。MRI.COM ではこれら全ての場合において、フラックスの形にして水温・塩分の境界条件としている。淡水フラックスをそのままモデルに導入できるのは、自由表面（1.2.1 節,5 章）のときで、rigid-lid （1.2.1 節,4 章）の場合には、淡水フラックスを塩分フラックスに換算してモデルに導入する。

$$\kappa_V \frac{\partial T}{\partial z} = F_T \tag{1.45}$$

$$\kappa_V \frac{\partial S}{\partial z} = F_S \tag{1.46}$$

$$F_T = \frac{Q}{\rho_0 C_p} \tag{1.47}$$

$$F_S = -W \cdot S|_{z=0} \tag{1.48}$$

ここで Q は熱フラックス、C_p は海水の比熱、W は淡水フラックスである。

力学指向の実験などでは、フラックス駆動による、モデルのドリフトを防ぐため、海面の水温・塩分を気候値等（T^*,S^*）にリストアすることがある。

$$F_T = -\frac{1}{\gamma_t}(T - T^*)\Delta z_1 \tag{1.49}$$
$$F_S = -\frac{1}{\gamma_s}(S - S^*)\Delta z_1 \tag{1.50}$$

Δz_1 は一層目の層厚、γ_t, γ_s は気候値への緩和時間である。
海底（$z = -H$）;
断熱境界条件を用いる。

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{1.51}$$
$$\frac{\partial S}{\partial z} = 0 \tag{1.52}$$

連続の式

海面（$z = 0$）;
海面における鉛直速度の扱いには 2 種類ある（次節参照）。

$$w = \begin{cases} 0 & \text{rigid} - \text{lid 近似を行なう場合} \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{1}{h_\mu}\frac{\partial \eta}{\partial \mu} + v\frac{1}{h_\psi}\frac{\partial \eta}{\partial \psi} & \text{自由表面の場合} \end{cases} \tag{1.53}$$

海面（$z = -H$）;
海底で鉛直流速は斜面に沿う。

$$w = -\left(u\frac{1}{h_\mu}\frac{\partial H}{\partial \mu} + v\frac{1}{h_\psi}\frac{\partial H}{\partial \psi}\right) \tag{1.54}$$

海面境界層

海面境界層では、乱流が活発であり、成層が不安定でなくとも鉛直方向の混合が生じるが、この現象はモデルの基本方程式では表せない。MRI.COM では、一層目の鉛直粘性係数、拡散係数をあらかじめ大きくとるか、Mellor and Yamada (1982) の乱流境界層モデル（level 2.5）・Noh and Kim (1999) の乱流境界層モデル・Large et al. (1994) の K-profile parameterization のいずれかを用いて鉛直粘性・拡散係数を毎ステップ計算するかのいずれかの方法を用いる。

1.1.4 加速法

海洋循環が海面から海底までほぼ定常状態になるには、数千年かかる。自由表面を用いるときには、外部重力波の位相速度 (~ 200[m/s]) が、rigid-lid 近似を用いるときには、内部重力波の位相速度 (~ 3[m/s]) が積分時間間隔を取る際の制限条件となってくる。これらに即して時間間隔を決めていたのでは、数千年分の積分は行うことができない。

Bryan (1984) は、支配方程式を修正することによって、波の位相速度を遅くして積分時間間隔を長くとり、また、比熱を小さくすることで熱的なバランスが早く成立するようにして、総積分時間を短くできるようにする方法を提唱した。これは、時間変化項のみに定数（運動方程式には α、水温には γ とする）をか

けて、運動の慣性を大きく、海水の比熱を小さくすることで達成される。これにより、定常状態になったときには、時間変化項はゼロであるから、加速の有無にかかわらず、バランスは同じになるはずである。

具体的には、運動方程式を

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{1}{\rho_0 h_\mu}\frac{\partial P}{\partial \mu} - \mathscr{A}(u) - \frac{v}{h_\mu h_\psi}\left(\frac{\partial h_\mu}{\partial \psi}u - \frac{\partial h_\psi}{\partial \mu}v\right) + \mathscr{V}_u \tag{1.55}$$

$$\alpha\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho_0 h_\psi}\frac{\partial P}{\partial \psi} - \mathscr{A}(v) + \frac{u}{h_\mu h_\psi}\left(\frac{\partial h_\mu}{\partial \psi}u - \frac{\partial h_\psi}{\partial \mu}v\right) + \mathscr{V}_v \tag{1.56}$$

水温・塩分方程式を

$$\gamma\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathscr{A}(T) + \mathscr{D}(T) \tag{1.57}$$

$$\gamma\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathscr{A}(S) + \mathscr{D}(S) \tag{1.58}$$

とすることで、時間を $t' = t/\alpha$、Brunt-Vaisala 振動数を $N'^2 = N^2\alpha/\gamma$ としたのと同じことになり、鉛直モード分解したときの等価深度は $H'_n = H_n\alpha$ となる。外力項や粘性項を省いたときの慣性重力波の分散関係は

$$\omega^2 = \frac{f^2}{\alpha^2} + \left(\frac{gH_n}{\alpha}\right)(k^2 + l^2) \tag{1.59}$$

となる。α が大きいとき、角振動数 ω は $\alpha^{-1/2}$ のファクターで小さな値をとるようになり、それに伴い、位相速度も小さくなる。これに応じて積分時間間隔を長くとることができる。

ロスビー波の分散関係は

$$\omega = -\beta k\left[\alpha(k^2 + l^2) + \frac{f^2}{gH_n}\right]^{-1} \tag{1.60}$$

となり、やはり α を大きくとると、位相速度は小さくなる。

標準的に α としては数十から数百、γ としては、海面で 1、海底付近で 1/10 程度の値をとる。

加速法を用いるときに注意しなければならないことは、α を大きくとると、傾圧不安定が生じやすくなることである。これは実際におきないはずのものであるから、積分期間中の出力をチェックしながら積分を進める必要がある。

1.2　解く手続き

1.2.1　運動方程式

運動方程式を解く際には、速度と圧力の瞬間値がわかっている必要がある。速度は実際に解く直前のものを用いる。

圧力は静水圧の式を積分すると求まる。

$$P(\mu,\psi,z,t) = P_s(\mu,\psi,t) + g\int_z^0 \rho(\mu,\psi,z')dz' \tag{1.61}$$

この式から明らかなように、海面の圧力 $P_s(\mu,\psi,t)$ を知る必要がある（海面に限らず、水柱のどこかで求まっていれば良いのであるが）。

海面高度（η）がわかっていれば、問題ない（$P_s(\mu,\psi,t) = \rho g\eta$）。これには、鉛直積分した運動方程式を解けば良いのであるが、海面の昇降によって生じる外部重力波は位相速度が大きく、モデルで解く際には短いタイムステップをとることが要求される。しかし、長い時間スケールを持つ現象を対象としている場合

（海洋大循環モデルで扱う現象はまさにそれにあたる）、この外部重力波は大きな意味をもたず、しかも、位相速度が桁違いに大きいため、できればモデル内部で生じる現象の中からこれを除きたい。

この要請に対しては、海面に蓋をして、海面の昇降を許さず、外部重力波を生じさせない設定のもとで方程式を解く方法がある（rigid-lid 近似）。この場合、海面の圧力は蓋を押す圧力として、診断的に求めることができる。

敢えてこの近似を行なわない場合、短い時間ステップで、長時間積分を行なうことはできない。この問題は、順圧成分と傾圧成分に分けて解くことによって解決される。すなわち、順圧成分のある時間範囲における平均状態を傾圧成分に反映させることによって、傾圧成分を解く時間ステップを長くとるようにしている。

いずれにせよ、運動方程式は、基本方程式を直接解くのではなく、順圧成分と傾圧成分に分けて解くことになる。

順圧成分：海面に蓋をする方法

海面に蓋をするとは、すなわち、海面に鉛直速度がないことと同等である。

$$w = 0 \qquad \text{at} \quad z = 0 \tag{1.62}$$

この条件のもと、連続の式を海底（$z = -H$）から海面まで積分すると、

$$\frac{1}{h_\mu}\frac{\partial(h_\psi H\bar{u})}{\partial\mu} + \frac{1}{h_\psi}\frac{\partial(h_\mu H\bar{v})}{\partial\psi} = 0 \tag{1.63}$$

ここで、$\bar{\alpha}$ は α の鉛直平均

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{H}\int_{-H}^{0}\alpha dz \tag{1.64}$$

を表す。これにより、流線関数 $\Psi(x,y,t)$ が次のように定義できる。

$$\bar{u} = -\frac{1}{H}\frac{1}{h_\psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\psi} \tag{1.65}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{H}\frac{1}{h_\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu} \tag{1.66}$$

一方、運動方程式を鉛直積分し、深さ H で割ると、

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} - f\bar{v} = \bar{F_\mu} - \frac{1}{\rho_0}\frac{1}{h_\mu}\frac{\partial P_s}{\partial\mu} \tag{1.67}$$

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + f\bar{u} = \bar{F_\psi} - \frac{1}{\rho_0}\frac{1}{h_\psi}\frac{\partial P_s}{\partial\psi} \tag{1.68}$$

ここで、

$$F_\mu = -\mathscr{A}(u) - \frac{v}{h_\mu h_\psi}\left(\frac{\partial h_\mu}{\partial\psi}u - \frac{\partial h_\psi}{\partial\mu}v\right) - \frac{g}{\rho_0}\frac{1}{h_\mu}\int_z^0\frac{\partial\rho}{\partial\mu}dz' + \mathscr{V}_u \tag{1.69}$$

$$F_\psi = -\mathscr{A}(v) + \frac{u}{h_\mu h_\psi}\left(\frac{\partial h_\mu}{\partial\psi}u - \frac{\partial h_\psi}{\partial\mu}v\right) - \frac{g}{\rho_0}\frac{1}{h_\psi}\int_z^0\frac{\partial\rho}{\partial\psi}dz' + \mathscr{V}_v \tag{1.70}$$

鉛直平均した運動方程式（1.67)、（1.68）の curl をとることで、海面圧力 P_s による寄与が消えて、順圧渦度方程式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{h_\mu h_\psi}\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{1}{H}\frac{h_\psi}{h_\mu}\frac{\partial \Psi}{\partial \mu}\right)+\frac{1}{h_\mu h_\psi}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{H}\frac{h_\mu}{h_\psi}\frac{\partial \Psi}{\partial \psi}\right)\right\}+\frac{1}{h_\mu h_\psi}\left\{\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{f}{H}\frac{\partial \Psi}{\partial \mu}\right)-\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{f}{H}\frac{\partial \Psi}{\partial \psi}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{h_\mu h_\psi}\left(\frac{\partial(h_\psi \bar{F_\psi})}{\partial \mu}-\frac{\partial(h_\mu \bar{F_\mu})}{\partial \psi}\right) \qquad (1.71)$$

境界条件として、岸を横切る流れがないことから、流線関数の値が岸に沿って一定というものを与える。但し、それらの値は陸続きでない島や大陸では異なる。

順圧渦度方程式は緩和法を用いて解く。MRI.COM では Kamenkovich 法を用いている（以前は hole-relaxation 法を組み合わせて解いていた）。Kamenkovich 法及び hole-relaxation 法については Ishizaki 1989 などが参考になる。以下、その手続きを解説する。

ベクトル表記を用いると、順圧渦度方程式 (1.71) は

$$\nabla_H\cdot\left(\frac{1}{H}\nabla_H\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)=\mathbf{k}\cdot\nabla\times\mathbf{G} \qquad (1.72)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{G}=\bar{\mathbf{F}}-\mathbf{f}\times\bar{\mathbf{v}} \qquad (1.73)$$

とした。ここで、$\bar{\mathbf{F}}$ は (1.69)、(1.70) を成分とするベクトルである。

境界条件は

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}=C_i \qquad i \text{ 番目の島上 } (i=1,\ldots,N) \qquad (1.74)$$

で与えられる。

C_i の値は次の手順で求める。運動方程式をベクトル表記すると、

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t}+\mathbf{f}\times\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{F}}-\frac{1}{\rho_0}\nabla P_s \qquad (1.75)$$
$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{k}}{H}\times\nabla\Psi \qquad (1.76)$$

である。i 番目の島の周りの領域（領域 A とする）で運動方程式を領域の境界に沿って線積分すると、

$$0=-\frac{1}{\rho_0}\oint_A \nabla P_s\cdot d\mathbf{s}=\oint_A\left\{\frac{\mathbf{k}}{H}\times\nabla\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)-\mathbf{G}\right\}\cdot d\mathbf{s} \qquad (1.77)$$

Kamenkovich 法では、解を

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}=\frac{\partial \Psi_0}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}C_i\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \qquad (1.78)$$

とおく。ここで $\frac{\partial \Psi_i}{\partial t}$ は

$$\nabla_H\cdot\left(\frac{1}{H}\nabla_H\frac{\partial \Psi_i}{\partial t}\right)=0 \qquad (1.79)$$

と境界条件

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t}=\begin{cases}1 & i \text{ 番目の島上}\\ 0 & i \text{ 番目以外の島上}\end{cases} \qquad (1.80)$$

を満たす。これらは時間変化する係数を持たないので、あらかじめ一回のみ解いておけば良い。

一方、$\frac{\partial \Psi_0}{\partial t}$ は

$$\nabla_H \cdot \left(\frac{1}{H}\nabla_H \frac{\partial \Psi_0}{\partial t}\right) = \mathbf{k}\cdot\nabla\times\mathbf{G} \tag{1.81}$$

と境界条件、

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} = 0 \qquad \text{全ての島上} \tag{1.82}$$

を満たす。こちらは毎ステップ解く必要がある。このような形の解は、(1.72)、(1.74) を満たしているので、あとは、C_i を決めるために (1.77) を適用する。つまり、j 番目の島だけを囲む任意の積分路で

$$-\sum_{i=1}^{N} C_i \oint_{A_j} \left\{\frac{\mathbf{k}}{H}\times\nabla\left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial t}\right)\right\}\cdot d\mathbf{s} = \oint_{A_j}\left\{\frac{\mathbf{k}}{H}\times\nabla\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial t}\right) - \mathbf{G}\right\}\cdot d\mathbf{s} \tag{1.83}$$

これは $C_1,...,C_N$ に対する、N 個の一次方程式を与えるので、解くことができる。係数行列は時間変化しないので、これもあらかじめ求めておき、逆行列を右辺に掛けることで C_i を決定している。

順圧成分：海面の昇降を許す方法

$$U = \int_{-H}^{\eta} u dz, \quad V = \int_{-H}^{\eta} v dz \tag{1.84}$$

とおくと、鉛直積分した運動方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -\frac{gH}{h_\mu}\frac{\partial \eta}{\partial \mu} + X \tag{1.85}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -\frac{gH}{h_\psi}\frac{\partial \eta}{\partial \psi} + Y \tag{1.86}$$

ここで

$$\begin{aligned} X &= -\int_{-H}^{\eta}\mathscr{A}(u)dz - \int_{-H}^{\eta}\frac{v}{h_\mu h_\psi}\left(\frac{\partial h_\mu}{\partial \psi}u - \frac{\partial h_\psi}{\partial \mu}v\right)dz - \frac{1}{\rho_0}\frac{1}{h_\mu}\int_{-H}^{\eta}dz\int_{z}^{0} g\rho_\mu dz + \int_{-H}^{\eta}\mathscr{V}_u dz \\ (&\equiv (\eta+H)\bar{F_\mu}\,) \end{aligned} \tag{1.87}$$

$$\begin{aligned} Y &= -\int_{-H}^{\eta}\mathscr{A}(v)dz + \int_{-H}^{\eta}\frac{u}{h_\mu h_\psi}\left(\frac{\partial h_\mu}{\partial \psi}u - \frac{\partial h_\psi}{\partial \mu}v\right)dz - \frac{1}{\rho_0}\frac{1}{h_\psi}\int_{-H}^{\eta}dz\int_{z}^{0} g\rho_\psi dz + \int_{-H}^{\eta}\mathscr{V}_v dz \\ (&\equiv (\eta+H)\bar{F_\psi}\,) \end{aligned} \tag{1.88}$$

連続の式は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{h_\mu h_\psi}\left(\frac{\partial (h_\psi U)}{\partial \mu} + \frac{\partial (h_\mu V)}{\partial \psi}\right) = 0 \tag{1.89}$$

となるので、これらを連立させて、U、V、η を解く。

傾圧成分

傾圧成分を解くには、順圧成分を解いた時点で、(1.67)、(1.68) または (1.85)、(1.86) を用いて $P_s(\mu,\psi,t)$ を診断的に求めることができるので、これを用いて解くことができる。しかし、以下の巧妙な方法を用いることにより、$P_s(\mu,\psi,t)$ を求めるという操作をスキップすることができる。

傾圧成分を $\hat{u}, \hat{v}$ とすると、

$$u = \hat{u} + \bar{u} \tag{1.90}$$

$$v = \hat{v} + \bar{v} \tag{1.91}$$

と表される。

u'、v' を、海面圧力を落とした方程式の時間変化項

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = fv + F_\mu \quad (1.92)$$
$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -fu + F_\psi \quad (1.93)$$

を表すものする。

$$\frac{\partial \overline{u'}}{\partial t} = f\overline{v} + \overline{F_\mu} \quad (1.94)$$
$$\frac{\partial \overline{v'}}{\partial t} = -f\overline{u} + \overline{F_\psi} \quad (1.95)$$

が成り立つので、上式の差をとると、

$$\frac{\partial (u' - \overline{u'})}{\partial t} - f(v - \overline{v}) = F_\mu - \overline{F_\mu} \quad (1.96)$$
$$\frac{\partial (v' - \overline{v'})}{\partial t} + f(u - \overline{u}) = F_\psi - \overline{F_\psi} \quad (1.97)$$

となる。これに

$$\overline{F_\mu} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - f\overline{v} + \frac{1}{\rho_0 h_\mu}\frac{\partial P_s}{\partial \mu} \quad (1.98)$$
$$\overline{F_\psi} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + f\overline{u} + \frac{1}{\rho_0 h_\psi}\frac{\partial P_s}{\partial \psi} \quad (1.99)$$

を利用すると、

$$\frac{\partial (\overline{u} + u' - \overline{u'})}{\partial t} - fv = F_\mu - \frac{1}{\rho_0 h_\mu}\frac{\partial P_s}{\partial \mu} \quad (1.100)$$
$$\frac{\partial (\overline{v} + v' - \overline{v'})}{\partial t} + fu = F_\psi - \frac{1}{\rho_0 h_\psi}\frac{\partial P_s}{\partial \psi} \quad (1.101)$$

となり、$\overline{u} + u' - \overline{u'} = u$、$\overline{v} + v' - \overline{v'} = v$、すなわち $\hat{u} = u' - \overline{u'}$、$\hat{v} = v' - \overline{v'}$ と解釈される。つまり、(1.92)、(1.93) を解いて (u', v') を求め、そこから $u' - \overline{u'}, v' - \overline{v'}$ によって、傾圧成分を求めれば良いことになる。

1.2.2　水温（温位）・塩分方程式

水温の予報には、現場水温ではなく、海面基準のポテンシャル水温（温位）に換算した値を全層で用いる。鉛直方向に拡散による混合を行う場合、鉛直方向への海水の移動による水圧変化による水温の変化を考慮して混合を行わなければならないが、現場水温を用いると、単純な混合としてこれを表現することが困難であるからである。

温位・塩分は移流拡散方程式である (1.26)、(1.27) （または (1.30)）を解くが、実際に解く際にはそのまま差分化している。差分化については第 7 章で解説する。

運動方程式では、圧力の計算に密度が必要になるが、これには、現場の密度を用いる。現場密度には圧縮性が考慮されている。密度を求めるのに海水の状態方程式（1.39）を用いるが、ここではこの求め方について解説する。

状態方程式の一般論

海水の状態方程式は UNESCO (1981) で提供されており、これは、（現場水温、塩分、圧力）の関数である。ポテンシャル水温ではないことに注意。

純水（$S=0$）の密度 ρ_w は水温 T の関数として

$$\begin{aligned}\rho_w(T) &= 999.842594+6.793952\times10^{-2}T-9.095290\times10^{-3}T^2 \\ &\quad +1.001685\times10^{-4}T^3-1.120083\times10^{-6}T^4+6.536332\times10^{-9}T^5\end{aligned} \tag{1.102}$$

海面の密度 $\rho(S,T,0)$ は、海面水温、塩分を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \rho_w \\ &\quad +(0.824493-4.0899\times10^{-3}T+7.6438\times10^{-5}T^2 \\ &\quad -8.2467\times10^{-7}T^3+5.3875\times10^{-9}T^4)S \\ &\quad +(-5.72466\times10^{-3}+1.0227\times10^{-4}T-1.6546\times10^{-6}T^2)S^{3/2} \\ &\quad +4.8314\times10^{-4}S^2\end{aligned} \tag{1.103}$$

海水の体積膨張率を使って、海中での密度を計算する。

純水の体積膨張率は、

$$\begin{aligned}K_w &= 19652.21+1.484206\times10^{2}T-2.327105T^2 \\ &\quad +1.360477\times10^{-2}T^3-5.155288\times10^{-5}T^4\end{aligned} \tag{1.104}$$

海面にある海水の体積膨張率は

$$\begin{aligned}K_0 &= K_w+(54.6746-0.603459T+1.09987\times10^{-2}T^2-6.1670\times10^{-5}T^3)S \\ &\quad +(7.944\times10^{-2}+1.6483\times10^{-2}T-5.3009\times10^{-4}T^2)S^{3/2}\end{aligned} \tag{1.105}$$

これらを使って海水の体積膨張率は以下の式で求める。

$$\begin{aligned}K &= K_0 \\ &\quad +P(3.239908+1.43713\times10^{-3}T+1.16092\times10^{-4}T^2-5.77905\times10^{-7}T^3) \\ &\quad +P(2.2838\times10^{-3}-1.0981\times10^{-5}T-1.6078\times10^{-6}T^2)S \\ &\quad +P(1.91075\times10^{-4})S^{3/2} \\ &\quad +P^2(8.50935\times10^{-5}-6.12293\times10^{-6}T+5.2787\times10^{-8}T^2) \\ &\quad +P^2(-9.9348\times10^{-7}+2.0816\times10^{-8}T+9.1697\times10^{-10}T^2)S\end{aligned} \tag{1.106}$$

密度は以下の式で求める。

$$\rho=\rho_0/(1-P/K) \tag{1.107}$$

$$\sigma=\rho-1000.0 \tag{1.108}$$

モデルの予報変数はポテンシャル水温 (θ) であるから、（ポテンシャル水温、塩分、圧力）の関数としての状態方程式が必要である。

この作業を行なうためには、ポテンシャル水温を現場水温に換算する必要がある。これは、adiabatic lapse rate $\Gamma(T,S,P)$ を用いて、

$$T(\theta_0,S,P) = \theta_0 + \int_{P_0}^{P} \Gamma(T,S,P')dP' \tag{1.109}$$

として求める。adiabatic lapse rate $\Gamma(T,S,P)$ は UNESCO から与えられていて、

$$\begin{aligned}
\Gamma(T,S,P) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 && (1.110)\\
&\quad + (b_0 + b_1 t)(S-35)\\
&\quad + \{c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + (d_0 + d_1 t)(S-35)\}p\\
&\quad + (e_0 + e_1 t + e_2 t^2)p^2\\
& && (1.111)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= +3.5803\times10^{-5} & c_2 &= +8.7330\times10^{-12} && (1.112)\\
a_1 &= +8.5258\times10^{-6} & c_3 &= -5.4481\times10^{-14}\\
a_2 &= -6.8360\times10^{-8} & d_0 &= -1.1351\times10^{-10}\\
a_3 &= -6.6228\times10^{-10} & d_1 &= +2.7759\times10^{-12}\\
b_0 &= +1.8932\times10^{-6} & e_0 &= -4.6206\times10^{-13}\\
b_1 &= -4.2393\times10^{-8} & e_1 &= +1.8676\times10^{-14}\\
c_0 &= +1.8741\times10^{-8} & e_2 &= -2.1687\times10^{-16}\\
c_1 &= -6.7795\times10^{-10}
\end{aligned}$$

現場水温への換算ができたら、状態方程式を用いて各圧力面での密度を計算する。

MRI.COM で用いる状態方程式

MRI.COM では、状態方程式を UNESCO の形を保ったまま、係数だけを変えることで得ている。係数はあらかじめ定めたポテンシャル水温、塩分の範囲で最小 2 乗法により求めている。

状態方程式の求め方は Ishizaki (1994) に従うが、定義の範囲は異なり、$-2 \le \theta \le 40$ [°C], $0 \le S \le 42$ [psu], $0 \le P \le 1000$ [bar] である。海面における密度（ポテンシャル密度, σ_θ）をまず求めるが、これは、式（1.102）、（1.103）をそのまま用いることができる。

圧力依存部分、体積膨張率 $K(\theta,S,P)$ については、多項式の同類項をまとめた以下の式を用いる

$$\begin{aligned}
K(\theta,S,P) &= e_1(P) + e_2(P)\theta + e_3(P)\theta^2 + e_4(P)\theta^3 + e_5(P)\theta^4 && (1.113)\\
&\quad + S(f_1(P) + f_2(P)\theta + f_3(P)\theta^2 + f_4(P)\theta^3)\\
&\quad + S^{3/2}(f_5(P) + f_6(P)\theta + f_7(P)\theta^2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e_1(P) &= ec_1 + (gc_1 + hc_1 P)P & f_1(P) &= fc_1 + (gc_5 + hc_4 P)P \\
e_2(P) &= ec_2 + (gc_2 + hc_2 P)P & f_2(P) &= fc_2 + (gc_6 + hc_5 P)P \\
e_3(P) &= ec_3 + (gc_3 + hc_3 P)P & f_3(P) &= fc_3 + (gc_7 + hc_6 P)P \\
e_4(P) &= ec_4 + gc_4 P & f_4(P) &= fc_4 \\
e_5(P) &= ec_5 & f_5(P) &= fc_5 + gc_8 P \\
& & f_6(P) &= fc_6 \\
& & f_7(P) &= fc_7
\end{aligned}
\tag{1.114}
$$

上式に出てくる係数は、θ, S, P の前述の範囲で UNESCO の形を保ったままの状態方程式で密度を計算したとき、現場水温・塩分を用いて求めた密度に対して誤差が最も小さくなるように定めた（(θ, S, P, σ) の 43×43×101 個の組に対する最小 2 乗法による fitting）ものである。

ec_1	19659.35	fc_1	52.85624
ec_2	144.5863	fc_2	-3.128126×10^{-1}
ec_3	-1.722523	fc_3	6.456036×10^{-3}
ec_4	1.019238×10^{-2}	fc_4	-5.370396×10^{-5}
ec_5	-4.768276×10^{-5}	fc_5	3.884013×10^{-1}
		fc_6	9.116446×10^{-3}
		fc_7	-4.628163^{-4}

gc_1	3.185918	hc_1	2.111102×10^{-4}
gc_2	2.189412×10^{-2}	hc_2	-1.196438×10^{-5}
gc_3	-2.823685×10^{-4}	hc_3	1.364330×10^{-7}
gc_4	1.715739×10^{-6}	hc_4	-2.048755×10^{-6}
gc_5	6.703377×10^{-3}	hc_5	6.375979×10^{-8}
gc_6	-1.839953×10^{-4}	hc_6	5.240967×10^{-10}
gc_7	1.912264×10^{-7}		
gc_8	1.477291×10^{-4}		

密度が不安定成層している場合の処理

静水圧平衡を用いているため、密度に不安定成層がある場合には、何らかの方法で不安定を除去しなければならない。

一般的には、一瞬にして鉛直対流がおこって、解消されるとする。これを対流調節（convective adjustment）と呼ぶ。

また、これに加え、局所的に不安定成層しているところでは、鉛直拡散係数を大きくする（10000 [$\mathrm{cm^2 s^{-1}}$]）ことで鉛直混合を起こすようにする。この場合は、「2.5 鉛直拡散方程式の陰解法」で説明する、陰解法でトレーサー方程式を解かなければならない（オプション名 `VVDIMP`）。

References

Bryan, K. 1969: A numerical method for the study of the circulation of the world ocean, *J. Comput. Phys.*, **4**, 347-376.

Bryan, K. 1984: Accelerating the convergence to equilibrium of ocean-climate models., *J. Phys. Oceanogr.*, **14**, 666-673.

Gent, P. R., and J. C. McWilliams. 1990: Isopycnal mixing in ocean circulation models., *J. Phys. Oceanogr.*, **20**, 150-155.

Griffies, S. M. 1998: The Gent-McWilliams skew flux, *J. Phys. Oceanogr.*, **28**, 831-841.

Ishizaki, H. 1989: Comparison of computational efficiency of hole relaxation and Kamenkovich's method in solving vorticity equations in multi-connected regions., *Pap. Meteor. Geophys.*, **40**, 103-114.

Ishizaki, H. 1994: A Simulation of the abyssal circulation in the North Pacific Ocean. Part II: Theoretical Rationale, *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 1941-1954.

Large, W. G., J. C. McWilliams, and S. C. Doney, 1994: Oceanic vertical mixing: a review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization, *Rev. Geophys.*, **32**, 363-403.

Mellor, G. L., and T. Yamada, 1982: Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **20**, 851-875.

Noh, Y., and H.-J. Kim, 1999: Simulations of temperature and turbulence structure of the oceanic boundary layer with the improved near-surface process, *J. Geophys. Res.*, **104**, 15,621-15,634.

Phillips, N. 1966: The equation of motion for a shallow rotating atmosphere and the "Traditional approximation", *J. Atmos. Sci.*, **23**, 626–628.

Smagorinsky, J. 1963: General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment., *Mon. Wea. Rev.*, **91**, 99–164.

UNESCO, 1981: Tenth report of the Joint Panel on Oceanographic Tables and Standards, Sidney, B. C., September 1980., *Unesco Technical papers in marine science*, **36**, 25pp.

Weatherly, 1972: A study of the bottom boundary layer of the Florida current., *J. Phys. Oceanogr.*, **2**, 54–72.

Appendix A. 海洋モデルで用いる物理定数

ここには、海洋モデルで用いる基本的な物理定数の値を載せる。

これらは param.F90（module oc_mod_param）で定義されている。第 9 章「熱フラックス」や第 10 章「海氷」には、局所的に使用する物理定数が列挙されている。

	値	MRI.COM での変数名
地球の半径	$6375.0 \times 10^5\,\mathrm{cm}$	RADIUS
重力加速度	$980.1\,\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$	GRAV
地球の回転角速度	$\pi/43082.0\,\mathrm{radian} \cdot \mathrm{s}^{-1}$	OMEGA
0 ℃の絶対温度	$273.16\,\mathrm{K}$	TAB
海水の平均密度	$1.00\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$	RO
海水の比熱	$3.99 \times 10^7\,\mathrm{erg} \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$	CP
	$(1.0\,\mathrm{erg} \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1} = 1.0 \times 10^{-4}\mathrm{J} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1})$	