Hirose, F., K. Maeda, and Y. Yoshida (2019), Maximum magnitude of subduction earthquakes along the Japan-Kuril-Kamchatka trench estimated from seismic moment conservation, Geophys. J. Int., 219, 1590-1612, doi:10.1093/gji/ggz381.の簡易和訳版

モーメント保存則から推定される日本海溝～千島・カムチャッカ海溝沿いのプレート境界型地震の最大規模

気象研究所地震津波研究部* 弘瀬冬樹

気象庁地震火山部** 前田憲二

気象庁気象大学校*** 吉田康宏

Maximum magnitude of subduction earthquakes along the Japan-Kuril-Kamchatka trench estimated from seismic moment conservation

Fuyuki Hirose

* Seismology and Tsunami Research Department, Meteorological Research Institute, 1-1 Nagamine, Tsukuba, Ibaraki, 305-0052, Japan

Kenji Maeda

** Seismology and Volcanology Department, Japan Meteorological Agency, 1-3-4 Otemachi, Chiyoda-ku, Tokyo, 100-8122, Japan

Yasuhiro Yoshida

*** Meteorological College, Japan Meteorological Agency, 7-4-81 Asahi-cho, Kashiwa, Chiba, 277-0852, Japan

---

* 〒305-0052　茨城県つくば市長峰 1-1　気象研究所地震津波研究部

** 〒100-8122　東京都千代田区大手町 1-3-4　気象庁地震火山部

*** 〒277-0852　千葉県柏市旭町 7-4-81　気象庁気象大学校

Hirose, F., K. Maeda, and Y. Yoshida (2019), Maximum magnitude of subduction earthquakes along the Japan-Kuril-Kamchatka trench estimated from seismic moment conservation, Geophys. J. Int., 219, 1590-1612, doi:10.1093/gji/ggz381.の簡易和訳版

SUMMARY

1977 年〜2017 年のプレート間地震活動の記録と地震モーメント保存則に基づく手法を用いて，日本海溝〜千島・カムチャッカ海溝沈み込み帯における地震の最大規模を推定した．本手法のキーポイントは，総地震モーメントレートとテクトニックモーメントレートが等しいと考えることにある．切断 G-R 則，宇津の式，ガンマ分布，および Tapered G-R 則に基づいて，日本海溝〜千島・カムチャッカ海溝の地震モーメント頻度分布をモデル化した．我々は最大規模を，切断 G-R 則では約 10，宇津の式では約 11 と推定したが，後者は過大評価である可能性がある．したがって，M_w 9.2 の 2011 年東北地方太平洋沖地震は，この地域で考えられる最大の地震ではない可能性がある．切断 G-R 則に基づく M 10 の再発間隔は 4000 年である．これら 2 つのモデル（切断 G-R 則と宇津の式）は，AIC の観点からは同程度であるが，95%信頼区間の範囲は宇津の式よりも切断 G-R 則の方が一貫して狭い．推定される最大規模は，使用されるモデルだけでなく，テクトニックモーメントを構成するパラメータにも依存する．最大規模の推定値を改善するには，より多くの地震データを蓄積し，テクトニックモーメントをより正確に推定することが不可欠である．

Keywords: 最大規模，沈み込み帯，地震モーメント保存則，切断 G-R 則，宇津の式

Keypoints

- 地震モーメント保存則に基づいて，日本海溝〜千島・カムチャッカ海溝沿いの沈み込み帯で発生し得る地震の最大規模を推定した．
- 最大規模はそれぞれ切断 G-R 則では約 10，宇津の式では約 11 と推定された．
- M_w 9.2 の 2011 年東北地方太平洋沖地震は，この地域の最大地震ではない可能性がある．

§1. はじめに

ある地域において起こり得る地震の最大規模を把握しておくことは，防災対策を考える上で必要不可欠である．一般的に最大規模を精度良く推定するためには，最大規模地震の平均的な発生間隔以上のデータ期間が必要である．しかし，巨大地震の再来間隔は人類の一生よりも遥かに長く，我々は限られたデータしか持ち合わせていない．

最大規模を推定する試みとして松澤 [2013]は，極めて粗い見積もりと断り書きをした上で，断層面積と規模のスケーリング則を適用し，日本海溝～千島・カムチャッカ海溝沿いの最大規模をモーメントマグニチュード 10 と推定した．しかし，この推定手法では実際に発生している地震活動のデータが活用されていない．以下，混乱を避けるため，モーメントマグニチュードは小文字の m，モーメントは大文字の M で表す．Kagan and Jackson [2013]はモーメント保存則に基づき，いくつかの仮定をおいて，地震データから，全世界の沈み込み帯で発生する地震の最大規模を推定した．彼らは，地震の規模別頻度分布に基づき，ガンマ分布を規定するパラメータのひとつを最大規模と見做し，東北沖で発生する最大規模（m）を 9.26 ± 0.29 と推定し，m 9.2 の 2011 年東北地方太平洋沖地震［Hirose et al., 2011］（以下，東北沖地震）はこの地域の最大であり，想定の範囲内であると指摘した．一方，彼らは 2004 年スマトラ沖地震を含むか含まないかのデータ期間の違いにより，推定される最大規模の値が変わることも示した．彼らは 1977/01/01–2010/21/31（34 年間）の GCMT カタログを用いているため，東北沖地震を含むと，推定される最大規模の値が変わる可能性はある．Rong et al. [2014]は Tapered G-R 則を用い，予測期間を考慮して最大規模の推定を行った．彼らは日本海溝～千島・カムチャッカ海溝の広い範囲について，1000 年間で最大 m 9.2，10000 年間で最大 m 9.3 と推定した．しかし，ガンマ分布及び Tapered G-R 則のどちらの則も，本来分布の最大値を持たない．一方，切断 G-R 則［宇津, 1978］や宇津の式［Utsu, 1974］は，ある値以上の規模は起きないという明確な拘束がかかる則である．最大規模の推定にはこれらの則を用いるべきだろう．

そこで我々は，Kagan and Jackson [2013]のデータ期間を 7 年間延長し（1977/01/01–2017/12/31，41 年間），モーメント保存則に基づいた切断 G-R 則及び宇津の式を適

用して，日本海溝～千島・カムチャッカ海溝の最大規模の推定を行った．このとき，参考としてガンマ分布及び Tapered G-R 則も適用した．

§2. データ

解析領域は，日本海溝～千島・カムチャッカ海溝とした（**Fig. 1**）．解析には GCMT カタログ［Dziewonski et al., 1981; Ekström et al., 2012］を用い，プレート境界型地震のみを抽出した．先行研究［Kagan and Jackson, 2013］では，地震がプレート境界で発生しているか否かは考慮されていなかった．しかしながら，モーメント保存則がプレート間カップリング率を構成要素としていることから，厳密にはプレート境界面でのモーメント保存則を考えるべきである．日本海溝～千島・カムチャッカ海溝の走向が 180–240°のため，誤差（±30°）を考慮して断層の走向 150–270°とし，傾斜角 0–45°，すべり角 45–135°のメカニズム解を持つイベントをプレート境界型地震とした．イベントの深さは 0–70 km，規模は completeness［Ekström et al., 2012］を考慮して $m \geq 5.8$ とした．期間は 3 期間について調査した．開始日はいずれも 1977 年 1 月 1 日である．終了日が異なり，①2010 年 12 月 31 日，②2013 年 12 月 31 日，③2017 年 12 月 31 日である．①は Kagan and Jackson [2013]（や Rong et al. [2014]）で用いられたデータ期間で，東北沖地震前の期間である．②及び③はいずれも東北沖地震の余震期間を含むが，4 年間の違いが推定結果にどのような影響を与えるかをチェックするために設定したデータ期間である．

§3. 解析手法及びパラメータ設定

最大規模の推定には Kagan and Jackson [2013]と同様にモーメント保存則に基づいた手法を用いた．この手法のキーポイントは，テクトニックモーメントレート$\dot{M}_T = \chi\mu W L V_{pl}$を考慮し，地震モーメントの総量$\dot{M}_s$が$\dot{M}_T$と等しいと考えることである．ここで$\chi$はプレート間カップリング率，$\mu$は剛性率，$W$は断層幅，$L$は断層長，そして$V_{pl}$はプレート収束速度である．我々は各パラメータを次のように設定した．

上盤プレート（オホーツクプレート）と沈み込む太平洋プレートの収束速度は MORVEL［DeMets et al., 2010］を用いた．各地点におけるプレート収束速度の算出は，UNAVCO の Web サイト［https://www.unavco.org/］上で提供されている Plate

Motion Calculator を用いた．本解析領域のプレート収束速度は 8.24–9.32 cm/y である（**Fig. 1** の矢印）．本解析では簡単のために，プレート収束速度を 8.83 cm/y とした．これは，日本海溝及び千島・カムチャッカ海溝それぞれの中心付近のプレート収束速度値（それぞれ 9.26，8.69 cm/y）を代表値として，領域の長さで重み付け $\left(= 9.26 \times \frac{1}{4} + 8.69 \times \frac{3}{4}\right)$をしたことによる．

Hashimoto et al. [2012]は，北海道沖〜関東沖にかけてのすべり欠損レートを東北沖地震前の 1996–2000 年における全球測位衛星システム（GNSS）のデータから推定した．すべり欠損は空間的に一様ではなく，比較的大きな値（> 9 cm/y）を持つ目玉が根室沖，十勝沖，宮城沖，茨城沖に分布している．一方，岩手県沖は~3 cm/y と最も低い．東北沖におけるすべり欠損レートは平均 6 cm/y 程度と読み取れる．プレート間カップリング率は，地震間のすべり欠損レートとプレート収束速度の比から求められるため，プレート間カップリング率は 65%（=6/9.26）となる．一般的に GNSS 解析によるすべり欠損の推定では，地表変位の原因をプレート境界面に全て押し付ける［Savage, 1983］．すなわち，GNSS 解析期間中に発生したプレート境界小地震や陸側プレート内・スラブ内地震による応力解放はプレート境界におけるゆっくりすべりを含む安定すべりの一部と見做すことになり，テクトニックモーメントの見積には寄与しない．本研究では，プレート境界小地震で解放される地震モーメント（エネルギー）も考慮すること（4.6 節参照）によって最大規模を精度良く推定することを目的としている．したがって，プレート境界小地震によるすべりが，GNSS で推定された安定すべりの何割に相当するのかは不明であるが，プレート境界小地震を考慮すると，本研究で与えるべきプレート間カップリング率は GNSS で推定された 65%より大きな値であろう．

一方，Uchida and Matsuzawa [2011]は，1993–2007 年 3 月のおよそ 14 年間に発生した小繰り返し地震の解析から，東北沖地震の本震・余震域における平均的なプレート間カップリング率を 66%と推定した．ただし，このとき仮定したプレート収束速度は 7.2 cm/y［Shella et al., 2002］であるため，安定すべりレートは 2.4 cm/y である．この場合，MORVEL のプレート収束速度 9.26 cm/y を仮定すると，すべり欠損レートは 6.86 cm/y であるため，プレート間カップリング率は 74%となる．小繰り返し地震はプレート境界面のゆっくりすべりの一部を担っていると考えられており，

カリフォルニアで得られたモーメントとすべり量の経験則は東北日本沿岸付近のイベントでも概ね成り立つことが確認されている［Igarashi et al., 2003］．なお，GNSS 解析と同期間（1996–2000 年）における小繰り返し地震のすべり速度［Uchida and Matsuzawa, 2013］は，1993–2007 年 3 月で得られた値と同程度である．プレート間カップリング率は，プレート境界における地震や安定すべりだけでなく，陸側プレート内・スラブ内のようなプレート境界外の地震によるエネルギー解放によっても変動すると考えられる．しかし，小繰り返し地震の解析では，プレート境界外の地震は捉えられないため，プレート間カップリング率は過大評価となる．一方で，小繰り返し地震の解析期間中に発生した m 3 程度の小繰り返し地震は，プレート境界における安定すべりと見做すことになるため，GNSS の項で述べたことと同様に，本研究で与えるべきプレート間カップリング率としては過小評価である．

小繰り返し地震解析によるプレート間カップリング率（74%）と GNSS で推定された値（65%）の差は，プレート境界小地震によるすべりと陸側プレート内・スラブ内の地震によるひずみの解放の一部に相当すると考えられるが，プレート境界の地震とそれ以外の地震の割合は不明である．また，千島・カムチャッカ海溝沿いの大部分のプレート間カップリング率については不明である．そこで本研究では，プレート間カップリング率として 70%（65–74%の中間値）を代表値として考えた．また，カップリング率は時間的に変動する可能性も考慮して，カップリング率を 10–100%と変化させた場合の結果についても参考に示す．

剛性率は 49 GPa［Bird and Kagan, 2004］とした．これは Kagan and Jackson [2013] や Rong et al. [2014]と同じ値である．

日本海溝及び千島海溝の水深が平均約 7 km であること，プレート境界型地震の下限の深さが 50–60 km であること［例えば，Kita et al., 2010］から，断層幅は深さ 7–60 km 相当の幅とし，プレート形状［Nakajima and Hasegawa, 2006; Kita et al., 2010; Hayes et al., 2012］を考慮して，千島・カムチャッカ海溝は 173 km $(=(20-7)/\sin 10+(40-20)/\sin 20+(60-40)/\sin 30)$，日本海溝は 249 km $(=(40-7)/\sin 10+(60-40)/\sin 20)$とした（**Fig. 1** の挿入図）．断層長は海溝軸に沿う距離とし，千島・カムチャッカ海溝沿いは 2200 km，日本海溝沿いは 790 km とした．与えたパラメータ及びカップリング率を 100%とした場合に得られる$\dot{M}_T$の一

覧を **Table 1** に示す．

モーメント別累積頻度分布として，切断 G-R 則，宇津の式，ガンマ分布及び Tapered G-R 則を仮定した．これらの分布はβシリーズ（β値=b 値/1.5 などから得られるシリーズ）と最大規模を表現する特徴的モーメントM_cシリーズの 2 つのパラメータで表現される．$\dot{M}_T$を与えれば，M_cシリーズはβシリーズから一意的に求まる．各則の式やパラメータの推定の詳細については次章にゆずる．

§4.　数式一覧

マグニチュード m とモーメント M は以下の関係式で結ばれる．

$$\log M = 1.5m + 9.0 \tag{0-1}$$

$$m = \frac{\log M}{1.5} - 6.0 \tag{0-2}$$

$$\frac{\partial m}{\partial M} = \frac{1}{1.5M \ln 10} \tag{0-3}$$

ここで，log は常用対数，ln は自然対数を表す．式(0-1)の右辺第 2 項の係数は，9.0 の他に 9.05［Hanks and Kanamori, 1979］や 9.1［Kanamori, 1977］が提案されているが，Kagan and Jackson [2013]や Rong et al. [2014]に倣って 9.0 とした．これにより，東北沖地震のモーメントマグニチュードは 9.2 であり，気象庁マグニチュード 9.0［Hirose et al., 2011］より 0.2 大きくなることに注意が必要である．

総地震モーメント解放率$\dot{M}_s$の解析解は，モーメントの確率密度関数$\phi(M)$及び相補累積分布関数$\Phi(M)$より求まる．4.1–4.5 節では各則のマグニチュード表現及びモーメント表現，4.6 節では各則における総地震モーメント解放率$\dot{M}_s$の導出過程を示す．

4.1. G-R 則

4.1.1. G-R 則のマグニチュード表現

マグニチュードがm〜$m + dm$である地震の個数を$n_m(m)dm$と置くと，G-R 則［Gutenberg and Richter, 1944］による規模別頻度分布は次のように表せる．

$$\log n_m(m) = a - bm \tag{1-1}$$

$$n_m(m) = 10^a 10^{-bm} = 10^a e^{-Bm} \tag{1-2}$$

コメントの追加 [f1]: 宇津［1999b，地震活動総説]の式(11.15) or (11.56)

ここで，a及びbは定数，$B = b \ln 10$である．m以上の地震の総数$N_m(m)$は，

$$N_m(m) = \int_m^\infty n_m(m')dm' = \frac{10^a e^{-Bm}}{B} \tag{1-3}$$

と書ける．下限マグニチュードをm_tとし，$x = m - m_t$と置くと，xの確率密度関数$f(x)$は，

$$f(x) = \frac{n_m(m)}{N_m(m_t)} = \frac{10^a e^{-Bm}}{\frac{10^a e^{-Bm_t}}{B}} = Be^{-Bx} = B10^{-bx} \tag{1-4}$$

コメントの追加 [f2]: 宇津 [1999b]の式(11.16) or (11.59)

となる．さらに，xの相補累積分布関数$\mathrm{F}(x)$は，

$$\mathrm{F}(x) = \int_x^\infty f(x')dx' = e^{-Bx} = 10^{-bx} \tag{1-5}$$

コメントの追加 [f3]: 宇津 [1999b]の式(11.60)

となる．m以上の地震の総数$N_m(m)$は，$\mathrm{F}(x)$を用いて次のようにも表せる．

$$N_m(m) = N_m(m_t)\mathrm{F}(x) = N\mathrm{F}(x) \tag{1-6}$$

ここで，$N = N_m(m_t)$と置いた．なお，$f(x)$と$\mathrm{F}(x)$には次の関係がある．

$$f(x) = -\frac{\partial \mathrm{F}(x)}{\partial x} \tag{1-7}$$

n_m個の観測値x_i $(i = 1, 2, \ldots, n_m)$に対する尤度Lは，

$$L = \prod_{i=1}^{N} f(x_i) = f(x_1) \times f(x_2) \times \cdots \times f(x_N) \tag{1-8}$$

で表されるので，対数尤度$\ln L$は，

$$\begin{aligned} \ln L &= \ln f(x_1) + \ln f(x_2) + \cdots + \ln f(x_N) = \sum_{i=1}^{N} \ln f(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \ln(Be^{-Bx_i}) = N \ln B - B\sum_{i=1}^{N} x_i \end{aligned} \tag{1-9}$$

コメントの追加 [f4]: 宇津 [1999b]の式(11.63)

Bの最尤推定値は，

$$\frac{\partial \ln L}{\partial B} = \frac{N}{B} - \sum_{i=1}^{N} x_i = 0 \tag{1-10}$$

$$\therefore B = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} x_i} = \frac{1}{\mathrm{E}[x]} \tag{1-11}$$

コメントの追加 [f5]: 宇津 [1999b]の式(11.61)

ここで，$\mathrm{E}[x]$はx_iの平均値を表す．

したがって，bの最尤推定値は，

$$\therefore b = \frac{1}{\mathrm{E}[x]\ln 10} = \frac{\log e}{\mathrm{E}[x]} = \frac{\log e}{\mathrm{E}[m] - m_t} \tag{1-12}$$

コメントの追加 [f6]: 宇津 [1999b]の式(11.17)

4.1.2. G-R 則のモーメント表現

4.1.1.節で示した関係式をモーメントの式へ変換していく．$n_m(m)dm$はマグニチュードがm～$m+dm$である地震の個数である．そのマグニチュードに対応するモーメントがM～$M+dM$である地震の個数$n_M(M)dM$は，式(0-2)，式(0-3)及び式(1-2)より，

$$\begin{aligned} n_M(M)dM &= n_m(m)dm = n_m(m)\frac{\partial m}{\partial M}dM \\ &= 10^a 10^{-b\left(\frac{\log M}{1.5}-6.0\right)}\frac{1}{1.5M\ln 10}dM \\ &= \frac{10^{a+6.0b}}{1.5\ln 10}M^{-\beta-1}dM \end{aligned} \tag{1-13}$$

と書ける．ここで，$\beta = \frac{b}{1.5}$である．

よって，式(1-2)の$n_m(m)$に対応するモーメント表現$n_M(M)$は，

$$\therefore n_M(M) = \frac{10^{a+6.0b}}{1.5\ln 10}M^{-\beta-1} \tag{1-14}$$

である．式(1-3)の$N_m(m)$に対応するモーメント表現$N_M(M)$は，式(1-13)より，

$$\begin{aligned} N_M(M) &= \int_M^\infty n_M(M')dM' = \frac{10^{a+6.0b}}{1.5\ln 10}\left[\frac{1}{-\beta}(M')^{-\beta}\right]_M^\infty \\ &= \frac{10^{a+6.0b}}{1.5\ln 10}\frac{1}{\beta}M^{-\beta} \end{aligned} \tag{1-15}$$

式(1-14)及び(1-15)より，Mの確率密度関数$\phi(M)$は，

$$\phi(M) = \frac{n_M(M)}{N_M(M_t)} = \frac{\frac{10^{a+6.0b}}{1.5\ln 10}M^{-\beta-1}}{\frac{10^{a+6.0b}}{1.5\ln 10}\frac{1}{\beta}M_t^{-\beta}} = \beta {M_t}^{\beta}M^{-\beta-1} \tag{1-16}$$

コメントの追加 [f7]: Kagan [2002, GJI, I]の式(4)と一致．

であるので，Mの相補累積分布関数$\Phi(M)$は，

$$\Phi(M) = \int_M^\infty \phi(M')dM' = {M_t}^{\beta}M^{-\beta} \qquad (\mathrm{M}_t \le M < \infty) \tag{1-17}$$

コメントの追加 [f8]: Kagan [2002, GJI, I]の式(5)や Kagan [2002, GJI, II]の式(2)と似ている．M の上限が異なることに留意．

M以上の地震の総数$N_M(M)$は，$\Phi(M)$を用いて次のようにも表せる．

$$N_M(M) = N_M(M_t)\Phi(M) = N\Phi(M) \tag{1-18}$$

なお，$\phi(M)$と$\Phi(M)$は次の関係がある．

$$\phi(M) = -\frac{\partial\Phi(M)}{\partial M} \tag{1-19}$$

n_M個の観測値M_i $(i = 1, 2, \ldots, n_M)$に対する対数尤度$\ln L$は，

$$\begin{aligned} \ln L &= \sum_{i=1}^{N} \ln \phi(M_i) = \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\beta {M_t}^{\beta} {M_i}^{-\beta-1}\right) \\ &= N[\ln\beta + \beta\ln M_t] - (1+\beta)\sum_{i=1}^{N} \ln M_i \end{aligned} \tag{1-20}$$

コメントの追加 [f9]: Kagan [2002, I]の式(21)と一致.

Bの最尤推定値は，

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\beta} = \frac{N}{\beta} + N\ln M_t - \sum_{i=1}^{N} \ln M_i = 0 \tag{1-21}$$

$$\therefore \beta = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \ln \frac{M_i}{M_t}} \tag{1-22}$$

コメントの追加 [f10]: Kagan [2002, I]の式(22)と一致.

4.2. 切断 G-R 則

4.2.1. 切断 G-R 則のマグニチュード表現

マグニチュードが上限c_{tr}（小文字）を持つ切断 G-R 則［例えば，宇津, 1978］による規模別頻度分布は次のように表される．

$$\log n_m(m) = a_{tr} - b_{tr}m \qquad (m \le c_{tr}) \tag{2-1}$$

$$n_m(m) = 10^{a_{tr}}10^{-b_{tr}m} = 10^{a_{tr}}e^{-B_{tr}m} \qquad (m \le c_{tr}) \tag{2-2}$$

$$n_m(m) = 0 \qquad (m > c_{tr}) \tag{2-3}$$

コメントの追加 [f11]: 宇津 [1999b]の式(11.87)

コメントの追加 [f12]: 宇津 [1999b]の式(11.89)

コメントの追加 [f13]: 宇津 [1999b]の式(11.87)

ここで，a_{tr}, b_{tr}及びc_{tr}は定数，$B_{tr} = b_{tr}\ln 10$である．m以上c_{tr}以下の総数$N_m(m)$は，

$$\begin{aligned} N_m(m) &= \int_m^{c_{tr}} n_m(m')dm' \\ &= \frac{10^{a_{tr}}}{B_{tr}}\left(e^{-B_{tr}m} - e^{-B_{tr}c_{tr}}\right) \qquad (m \le c_{tr}) \end{aligned} \tag{2-4}$$

コメントの追加 [f14]: 宇津 [1999b]の式(11.90)

$x\ (= m - m_t)$の確率密度関数$f(x)$は，

Hirose, F., K. Maeda, and Y. Yoshida (2019), Maximum magnitude of subduction earthquakes along the Japan-Kuril-Kamchatka trench estimated from seismic moment conservation, Geophys. J. Int., 219, 1590-1612, doi:10.1093/gji/ggz381.の簡易和訳版

$$f(x)=\frac{n_m(m)}{N_m(m_t)}=\frac{10^{a_{tr}}e^{-B_{tr}m}}{\frac{10^{a_{tr}}}{B_{tr}}\left(e^{-B_{tr}m_t}-e^{-B_{tr}c_{tr}}\right)}$$

$$=\frac{B_{tr}}{e^{B_{tr}(m-m_t)}-e^{B_{tr}(m-c_{tr})}}=\frac{B_{tr}}{e^{B_{tr}x}-e^{B_{tr}(x-C_{tr})}} \qquad \text{(2-5)}$$

$$=\frac{B_{tr}}{1-e^{-B_{tr}C_{tr}}}e^{-B_{tr}x}$$

コメントの追加 [f15]: 宇津 [1999b]の式(11.92)

ここで，$C_{tr}=c_{tr}-m_t$である．

さらに，xの相補累積分布関数$\mathrm{F}(x)$は，

$$\mathrm{F}(x)=\int_x^{C_{tr}}f(x')dx'=\frac{N_m(m)}{N_m(m_t)}=\frac{\frac{10^{a_{tr}}}{B_{tr}}\left(e^{-B_{tr}m}-e^{-B_{tr}c_{tr}}\right)}{\frac{10^{a_{tr}}}{B_{tr}}\left(e^{-B_{tr}m_t}-e^{-B_{tr}c_{tr}}\right)} \qquad \text{(2-6)}$$

$$=\frac{e^{-B_{tr}x}-e^{-B_{tr}C_{tr}}}{1-e^{-B_{tr}C_{tr}}}$$

コメントの追加 [f16]: 宇津 [1999b]の式(11.93)

このとき，変数xについて考えているので，積分の上限はC_{tr}（大文字）であることに留意．

対数尤度$\ln L$は，

$$\ln L=\sum_{i=1}^{N}\ln f(x_i)=\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{B_{tr}}{1-e^{-B_{tr}C_{tr}}}e^{-B_{tr}x_i}\right) \qquad \text{(2-7)}$$

$$=N\ln\frac{B_{tr}}{1-e^{-B_{tr}C_{tr}}}-B_{tr}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

コメントの追加 [f17]: 宇津 [1999b]の式(11.98)

パラメータB_{tr}及びC_{tr}の推定方法については，宇津 [1978, 1999b]を参照．

4.2.2. 切断 G-R 則のモーメント表現

4.2.1.節で示した関係式をモーメントの式へ変換していく．個数$n_M(M)dM$は，式(0-2)，式(0-3)及び式(2-2)より，

$$n_M(M)dM=n_m(m)dm=n_m(m)\frac{\partial m}{\partial M}dM$$

$$=10^{a_{tr}}10^{-b_{tr}\left(\frac{\log M}{1.5}-6.0\right)}\frac{1}{1.5M\ln 10}dM \qquad \text{(2-8)}$$

$$=\frac{10^{a_{tr}+6.0b_{tr}}}{1.5\ln 10}M^{-\beta_{tr}-1}dM \qquad (M\le M_{ctr})$$

と書ける．ここで，$\beta_{tr} = \frac{b_{tr}}{1.5}$，$M_{ctr}$は上限マグニチュード$c_{tr}$に対応する上限のモーメントである．よって，式(2-2)の$n_m(m)$に対応するモーメント表現$n_M(M)$は，

$$\therefore n_M(M) = \frac{10^{a_{tr}+6.0b_{tr}}}{1.5\ln 10} M^{-\beta_{tr}-1} \qquad (M \le M_{ctr}) \tag{2-9}$$

である．式(2-4)の$N_m(m)$に対応するモーメント表現$N_M(M)$は，式(2-8)より，

$$\begin{aligned} N_M(M) &= \int_M^{M_{ctr}} n_M(M')dM' = \frac{10^{a_{tr}+6.0b_{tr}}}{1.5\ln 10}\left[\frac{1}{-\beta_{tr}}(M')^{-\beta_{tr}}\right]_M^{M_{ctr}} \\ &= \frac{10^{a_{tr}+6.0b_{tr}}}{1.5\ln 10}\frac{1}{\beta_{tr}}\left(M^{-\beta_{tr}} - {M_{ctr}}^{-\beta_{tr}}\right) \end{aligned} \tag{2-10}$$

式(2-9)及び(2-10)より，Mの確率密度関数$\phi(M)$は，

$$\begin{aligned} \phi(M) &= \frac{n_M(M)}{N_M(M_t)} = \frac{\frac{10^{a_{tr}+6.0b_{tr}}}{1.5\ln 10} M^{-\beta_{tr}-1}}{\frac{10^{a_{tr}+6.0b_{tr}}}{1.5\ln 10}\frac{1}{\beta_{tr}}\left({M_t}^{-\beta_{tr}} - {M_{ctr}}^{-\beta_{tr}}\right)} \\ &= \beta_{tr}\frac{M^{-\beta_{tr}-1}}{{M_t}^{-\beta_{tr}} - {M_{ctr}}^{-\beta_{tr}}} \\ &= \frac{{M_{ctr}}^{\beta_{tr}}{M_t}^{\beta_{tr}}}{{M_{ctr}}^{\beta_{tr}} - {M_t}^{\beta_{tr}}}\beta_{tr}M^{-\beta_{tr}-1} \\ &= \frac{\beta_{tr}{M_t}^{\beta_{tr}}M^{-\beta_{tr}-1}}{1-\left(\frac{M_{ctr}}{M_t}\right)^{-\beta_{tr}}} \qquad (M_t \le M \le M_{ctr}) \end{aligned} \tag{2-11}$$

であるので，Mの相補累積分布関数$\Phi(M)$は，

$$\begin{aligned} \Phi(M) &= \int_M^{M_{ctr}} \phi(M')dM' = \frac{N_M(M)}{N_M(M_t)} = \frac{M^{-\beta_{tr}} - {M_{ctr}}^{-\beta_{tr}}}{{M_t}^{-\beta_{tr}} - {M_{ctr}}^{-\beta_{tr}}} \\ &= \frac{{M_t}^{\beta_{tr}}M^{-\beta_{tr}} - \left(\frac{M_{ctr}}{M_t}\right)^{-\beta_{tr}}}{1-\left(\frac{M_{ctr}}{M_t}\right)^{-\beta_{tr}}} \qquad (M_t \le M \le M_{ctr}) \end{aligned} \tag{2-12}$$

G-R 則の式(1-17)と比較すると，累乗のテーパーがかかっている．なお，M_{ctr}が∞の場合，G-R 則の式(1-17)と一致する．

対数尤度$\ln L$は，

コメントの追加 [f18]: Kagan [2002, GJI, I]の式(8)と一致.

コメントの追加 [f19]: Kagan [2002, GJI, I]の式(9)と一致.

Hirose, F., K. Maeda, and Y. Yoshida (2019), Maximum magnitude of subduction earthquakes along the Japan-Kuril-Kamchatka trench estimated from seismic moment conservation, Geophys. J. Int., 219, 1590-1612, doi:10.1093/gji/ggz381.の簡易和訳版

$$\ln L = \sum_{i=1}^{N} \ln \phi(M_i) = \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{{M_{ctr}}^{\beta_{tr}}{M_t}^{\beta_{tr}}}{{M_{ctr}}^{\beta_{tr}} - {M_t}^{\beta_{tr}}}\beta_{tr}{M_i}^{-\beta_{tr}-1}\right)$$
$$= N\left[\beta_{tr}\ln M_{ctr} + \beta_{tr}\ln M_t + \ln\beta_{tr} - \ln\left({M_{ctr}}^{\beta_{tr}} - {M_t}^{\beta_{tr}}\right)\right] - (1+\beta_{tr})\sum_{i=1}^{N}\ln M_i \tag{2-13}$$

コメントの追加 [f20]: Kagan [2002, I]の式(26)と一致．

4.3. 宇津の式

4.3.1. 宇津の式のマグニチュード表現

4.2 節の切断 G-R 則の他に，マグニチュードが上限c_u（小文字）を持つ式が提案されている［Utsu, 1974］．本論文では宇津の式と呼ぶ．規模別頻度分布は次のように表される．

$$\log n_m(m) = a_u - b_u m + \log(c_u - m) \qquad (m < c_u) \tag{3-1}$$

コメントの追加 [f21]: 宇津 [1999b]の式(11.101)

$$n_m(m) = 10^{a_u}10^{-b_u m}10^{\log(c_u-m)} = 10^{a_u}e^{-B_u m}(c_u - m) \qquad (m < c_u) \tag{3-2}$$

コメントの追加 [f22]: 宇津 [1999b]の式(11.102)

$$n_m(m) = 0 \qquad (m \geq c_u) \tag{3-3}$$

コメントの追加 [f23]: 宇津 [1999b]の式(11.101)

ここで，a_u，b_u及びc_uは定数，$B_u = b_u \ln 10$である．m以上c_u未満の総数$N_m(m)$は，

$$N_m(m) = \int_m^{c_u} n_m(m')dm' = 10^{a_u}\int_m^{c_u} e^{-B_u m'}(c_u - m')dm'$$
$$= 10^{a_u}\left\{\left[(c_u - m')\frac{1}{-B_u}e^{-B_u m'}\right]_m^{c_u} - \int_m^{c_u}(-1)\frac{1}{-B_u}e^{-B_u m'}dm'\right\} \tag{3-4}$$
$$= \frac{10^{a_u}}{B_u}\left\{\left(c_u - m - \frac{1}{B_u}\right)e^{-B_u m} + \frac{1}{B_u}e^{-B_u c_u}\right\} \qquad (m < c_u)$$

コメントの追加 [f24]: 宇津 [1999b]の式(11.103)

xの確率密度関数$f(x)$は，

$$f(x) = \frac{n_m(m)}{N_m(m_t)} = \frac{10^{a_u}e^{-B_u m}(c_u - m)}{\frac{10^{a_u}}{B_u}\left\{\left(c_u - m_t - \frac{1}{B_u}\right)e^{-B_u m_t} + \frac{1}{B_u}e^{-B_u c_u}\right\}}$$
$$= \frac{{B_u}^2 e^{-B_u x}(C_u - x)}{B_u C_u - 1 + e^{-B_u C_u}} = \frac{{B_u}^2 e^{-B_u x}(C_u - x)}{P} \tag{3-5}$$

コメントの追加 [f25]: 宇津 [1999b]の式(11.104)

ここで，$C_u = c_u - m_t$，$P = B_u C_u - 1 + e^{-B_u C_u}$である．

さらに，xの相補累積分布関数$\mathrm{F}(x)$は，

Hirose, F., K. Maeda, and Y. Yoshida (2019), Maximum magnitude of subduction earthquakes along the Japan-Kuril-Kamchatka trench estimated from seismic moment conservation, Geophys. J. Int., 219, 1590-1612, doi:10.1093/gji/ggz381.の簡易和訳版

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= \int_{x}^{C_u} f(x')dx' = \frac{{B_u}^2}{P}\int_{x}^{C_u} e^{-B_u x'}(C_u - x')dx' \\
&= \frac{B_u}{P}\left\{\left(C_u - x - \frac{1}{B_u}\right)e^{-B_u x} + \frac{1}{B_u}e^{-B_u C_u}\right\}
\end{aligned}
\tag{3-6}
$$

となる（宇津 [1999b]の式(11.105)のPに相当する箇所の“{”の位置は誤り）．このとき，変数xについて考えているので，積分の上限はC_u（大文字）であることに留意．対数尤度$\ln L$は，

$$
\begin{aligned}
\ln L &= \sum_{i=1}^{N} \ln f(x_i) = \sum_{i=1}^{N} \ln\left\{\frac{{B_u}^2 e^{-B_u x_i}(C_u - x_i)}{P}\right\} \\
&= N(2\ln B_u - \ln P - B_u \mathrm{E}[x]) + \sum_{i=1}^{N} \ln(C_u - x_i)
\end{aligned}
\tag{3-7}
$$

B_u及びC_uの最尤推定値は，$\frac{\partial \ln L}{\partial B_u} = \frac{\partial \ln L}{\partial C_u} = 0$を連立して求めればよい［例えば，宇津, 1999b; 馬渕・他, 2002］．

4.3.2. 宇津の式のモーメント表現

4.3.1.節で示した関係式をモーメントの式へ変換していく．個数$n_M(M)dM$は，式(0-2)，式(0-3)及び式(3-2)より，

$$
\begin{aligned}
n_M(M)dM &= n_m(m)dm = n_m(m)\frac{\partial m}{\partial M}dM \\
&= 10^{a_u}10^{-b_u\left(\frac{\log M}{1.5}-6.0\right)}10^{\log\left\{\left(\frac{\log M_{cu}}{1.5}-6.0\right)-\left(\frac{\log M}{1.5}-6.0\right)\right\}}\frac{1}{1.5M\ln 10}dM \\
&= \frac{10^{a_u+6.0b_u}}{1.5\ln 10}M^{-\beta_u-1}\frac{1}{1.5}\log\frac{M_{cu}}{M}dM \qquad (M < M_{cu})
\end{aligned}
\tag{3-8}
$$

と書ける．ここで，$\beta_u = \frac{b_u}{1.5}$，$M_{cu}$は上限マグニチュード$c_u$に対応する上限モーメントである．よって，式(3-2)の$n_m(m)$に対応するモーメント表現$n_M(M)$は，

$$
\therefore n_M(M) = \frac{10^{a_u+6.0b_u}}{1.5\ln 10}M^{-\beta_u-1}\frac{1}{1.5}\log\frac{M_{cu}}{M} \quad (M < M_{cu}) \tag{3-9}
$$

である．式(3-4)の$N_m(m)$に対応するモーメント表現$N_M(M)$は，式(3-8)より，

コメントの追加 [f26]: 宇津 [1999b]の式(11.105)．ただし，P に相当する箇所の”{“の位置は誤植だろう．

$$\begin{aligned} N_M(M) &= \int_M^{M_{cu}} n_M(M')dM' = \frac{1}{1.5}\frac{10^{a_u+6.0b_u}}{1.5\ln 10}\int_M^{M_{cu}} M'^{-\beta_u-1}\log\frac{M_{cu}}{M'}dM' \\ &= \frac{1}{1.5}\frac{10^{a_u+6.0b_u}}{1.5\ln 10}\frac{1}{\beta_u}\left(M^{-\beta_u}\log\frac{M_{cu}}{M} - \frac{M^{-\beta_u} - {M_{cu}}^{-\beta_u}}{\beta_u\ln 10}\right) \end{aligned} \tag{3-10}$$

式(3-9)及び(3-10)より，Mの確率密度関数$\phi(M)$は，

$$\begin{aligned} \phi(M) &= \frac{n_M(M)}{N_M(M_t)} = \frac{\frac{10^{a_u+6.0b_u}}{1.5\ln 10}M^{-\beta_u-1}\frac{1}{1.5}\log\frac{M_{cu}}{M}}{\frac{1}{1.5}\frac{10^{a_u+6.0b_u}}{1.5\ln 10}\frac{1}{\beta_u}\left(M^{-\beta_u}\log\frac{M_{cu}}{M_t} - \frac{{M_t}^{-\beta_u} - {M_{cu}}^{-\beta_u}}{\beta_u\ln 10}\right)} \\ &= \beta_u {M_t}^{\beta_u} M^{-\beta_u-1}\frac{\log\frac{M_{cu}}{M}}{\log\frac{M_{cu}}{M_t} - \frac{1-\left(\frac{M_{cu}}{M_t}\right)^{-\beta_u}}{\beta_u\ln 10}} \\ &(M_t \le M \le M_{cu}) \end{aligned} \tag{3-11}$$

であるので，Mの相補累積分布関数$\Phi(M)$は，

$$\begin{aligned} \Phi(M) &= \int_M^{M_{cu}} \phi(M')dM' = \frac{N_M(M)}{N_M(M_t)} = \frac{M^{-\beta_u}\log\frac{M_{cu}}{M} - \frac{M^{-\beta_u} - {M_{cu}}^{-\beta_u}}{\beta_u\ln 10}}{{M_t}^{-\beta_u}\log\frac{M_{cu}}{M_t} - \frac{{M_t}^{-\beta_u} - {M_{cu}}^{-\beta_u}}{\beta_u\ln 10}} \\ &= {M_t}^{\beta_u} M^{-\beta_u}\frac{\log\frac{M_{cu}}{M} - \frac{1-\left(\frac{M_{cu}}{M}\right)^{-\beta_u}}{\beta_u\ln 10}}{\log\frac{M_{cu}}{M_t} - \frac{1-\left(\frac{M_{cu}}{M_t}\right)^{-\beta_u}}{\beta_u\ln 10}} \\ &(M_t \le M \le M_{cu}) \end{aligned} \tag{3-12}$$

G-R 則の式(1-17)と比較すると，対数関数と累乗のテーパーがかかっている．

対数尤度$\ln L$は，

$$\begin{aligned} \ln L &= \sum_{i=1}^{N} \ln\phi(M_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \ln\left[\beta_u {M_t}^{\beta_u} {M_i}^{-\beta_u-1}\frac{\log\frac{M_{cu}}{M_i}}{\log\frac{M_{cu}}{M_t} - \frac{1-\left(\frac{M_{cu}}{M_t}\right)^{-\beta_u}}{\beta_u\ln 10}}\right] \end{aligned} \tag{3-13}$$

β_u及びM_{cu}の最尤推定値は，$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_u} = \frac{\partial \ln L}{\partial M_{cu}} = 0$を連立して求めればよいが，かなり面倒な形である．一般的に実用上はマグニチュードの式(3-7)から推定した値（B_u及びC_u）を，式(0-1)を介してモーメントに変換した値（β_u及びM_{cu}）を用いるのがよいだろう．本研究では，先験的に$\dot{M}_T$を与えることによって，M_{cu}をβ_uで表せるため，式(3-13)が最大となるβ_uを数値的に求めた（4.7 節参照）．

4.4. ガンマ分布

4.4.1. ガンマ分布のマグニチュード表現

mまたはMが大きくなると急速に個数が減るものの，上限がなく無限大まで取り得るモデルとしてガンマ分布が提案されている［斎藤・他, 1973; Kagan, 1991］．ここで取り上げるマグニチュードの関係式は，Utsu [1999a]が一般化斎藤式と呼ぶものである（Utsu [1999a]の式(15)）．また，Kagan [2002a]はマグニチュード表現を示していないが，彼の用いたガンマ分布が一般化斎藤式に基づいていると言及している（Kagan [2002a]の 2.2.1 節の最終行）．規模別頻度分布は次のように表される．

$$\log n_m(m) = a_g - b_g m - k10^{1.5m} \tag{4-1}$$

コメントの追加 [f27]: 宇津 [1999b]の式(11.143)

$$n_m(m) = 10^{a_g}10^{-b_g m}10^{-k10^{1.5m}} = 10^{a_g}e^{-B_g m}e^{-\gamma e^{\frac{B_g}{\beta_g}m}} \tag{4-2}$$

コメントの追加 [f28]: β =1/2 とすると，宇津 [1999b]の式(11.136)と一致．

ここで，a_g，b_g及びkは定数，$B_g = b_g \ln 10$，$\beta_g = \frac{b_g}{1.5}$，$\gamma = k \ln 10$である．$m$以上の総数$N_m(m)$は，

$$N_m(m) = \int_m^\infty n_m(m')dm' = \frac{10^{a_g}\beta_g\gamma^{\beta_g}}{B_g}\Gamma\left(-\beta_g, \gamma e^{\frac{B_g}{\beta_g}m}\right) \tag{4-3}$$

コメントの追加 [f29]: β =1/2 とすると，宇津 [1999b]の式(11.137)と一致．

ここで，$\Gamma\left(-\beta_g,\ \gamma e^{\frac{B_g}{\beta_g}m}\right)$は第 2 種不完全ガンマ関数で，次のように定義される．

$$\Gamma(a,x) \equiv \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}dt \qquad (x > 0) \tag{4-4}$$

xの確率密度関数$f(x)$は，

$$f(x) = \frac{n_m(m)}{N_m(m_t)} = \frac{10^{a_g}e^{-B_g m}e^{-\gamma e^{\frac{B_g}{\beta_g}m}}}{\frac{10^{a_g}\beta_g\gamma^{\beta_g}}{B_g}\Gamma\left(-\beta_g, \gamma e^{\frac{B_g}{\beta_g}m_t}\right)} = \frac{B_g e^{-B_g x}e^{-De^{\frac{B_g}{\beta_g}x}}}{\beta_g D^{\beta_g}\Gamma(-\beta_g, D)} \tag{4-5}$$

コメントの追加 [f30]: β =1/2 とすると，宇津 [1999b]の式(11.138)と一致．ただし，C は既に別の式で用いているため，D とした．なお，宇津の式中の小文字 c は大文字 C が正しい．

ここで，$D=\gamma e^{\frac{B_g}{\beta_g}m_t}$である．なお，式(4-5)は宇津 [1999b]の式(11.138)で$\beta_g=1/2$としたものと一致する（ただし，式(11.138)の小文字cは大文字Cの誤り）．

さらに，xの相補累積分布関数$\mathrm{F}(x)$は，

$$\mathrm{F}(x)=\int_x^\infty f(x')dx'=\frac{\Gamma\left(-\beta_g, De^{\frac{B_g}{\beta_g}x}\right)}{\Gamma(-\beta_g,D)} \tag{4-6}$$

コメントの追加 [f31]: β =1/2 とすると，宇津 [1999b]の式(11.139)と一致．

4.4.2. ガンマ分布のモーメント表現

4.4.1.節で示した関係式をモーメントの式へ変換していく．個数$n_M(M)dM$は，式(0-2)，式(0-3)及び式(4-2)より，

$$\begin{aligned}
n_M(M)dM &= n_m(m)dm = n_m(m)\frac{\partial m}{\partial M}dM \\
&= 10^{a_g}10^{-b_g\left(\frac{\log M}{1.5}-6.0\right)}10^{-k10^{1.5\left(\frac{\log M}{1.5}-6.0\right)}}\frac{1}{1.5M\ln 10}dM \\
&= \frac{10^{a_g+6.0b_g}}{1.5\ln 10}M^{-\beta_g-1}e^{-10^{-9.0}\gamma M}dM \\
&= \frac{10^{a_g+6.0b_g}}{1.5\ln 10}M^{-\beta_g-1}e^{-\frac{M}{M_{cg}}}dM
\end{aligned} \tag{4-7}$$

と書ける．ここで，M_{cg}は分布曲線を規定する（コーナーモーメント）パラメータで，$M_{cg}=(10^{-9.0}\gamma)^{-1}$と置いた．$M_{cg}$は切断 G-R 則の$M_{ctr}$や宇津の式の$M_{cu}$のように上限のモーメントを示すものではないことに注意が必要である．

よって，式(4-2)の$n_m(m)$に対応するモーメント表現$n_M(M)$は，

$$\therefore n_M(M)=\frac{10^{a_g+6.0b_g}}{1.5\ln 10}M^{-\beta_g-1}e^{-\frac{M}{M_{cg}}} \tag{4-8}$$

である．

同様に，式(4-3)の$N_m(m)$に対応するモーメント表現$N_M(M)$は，式(4-4)及び式(4-7)より，

$$
\begin{aligned}
N_M(M) = \int_M^\infty n_M(M')dM' &= \frac{10^{a_g+6.0b_g}}{1.5\ln 10}\int_M^\infty M'^{-\beta_g-1}e^{-\frac{M'}{M_{cg}}}dM' \\
&= \frac{10^{a_g+6.0b_g}}{1.5\ln 10}M_{cg}{}^{-\beta_g}\int_{\frac{M}{M_{cg}}}^\infty t^{-\beta_g-1}e^{-t}dt \\
&= \frac{10^{a_g+6.0b_g}}{1.5\ln 10}M_{cg}{}^{-\beta_g}\Gamma\left(-\beta_g,\frac{M}{M_{cg}}\right)
\end{aligned}
\tag{4-9}
$$

ここで途中，$t=\frac{M'}{M_{cg}}$の置き換えを行った．

式(4-8)及び(4-9)より，Mの確率密度関数$\phi(M)$は，

$$
\begin{aligned}
\phi(M) = \frac{n_M(M)}{N_M(M_t)} &= \frac{\frac{10^{a_g+6.0b_g}}{1.5\ln 10}M^{-\beta_g-1}e^{-\frac{M}{M_{cg}}}}{\frac{10^{a_g+6.0b_g}}{1.5\ln 10}M_{cg}{}^{-\beta_g}\Gamma\left(-\beta_g,\frac{M_t}{M_{cg}}\right)} \\
&= \frac{M^{-\beta_g-1}e^{-\frac{M}{M_{cg}}}}{M_{cg}{}^{-\beta_g}\Gamma\left(-\beta_g,\frac{M_t}{M_{cg}}\right)} \qquad (M_t \le M \le \infty)
\end{aligned}
\tag{4-10}
$$

コメントの追加 [f32]: Kagan [1991, GJI]の式(3)・(4)と一致．Kagan [2002, I]の式(16)・(17)とは変形すると一致する．この後で示す．

である．Mの相補累積分布関数$\Phi(M)$は，

$$
\begin{aligned}
\Phi(M) = \int_M^\infty \phi(M')dM' &= \frac{N_M(M)}{N_M(M_t)} \\
&= \frac{\Gamma\left(-\beta_g,\frac{M}{M_{cg}}\right)}{\Gamma\left(-\beta_g,\frac{M_t}{M_{cg}}\right)} \qquad (M_t \le M \le \infty)
\end{aligned}
\tag{4-11}
$$

対数尤度$\ln L$は，

$$\ln L = \sum_{i=1}^{N} \ln \phi(M_i) = \sum_{i=1}^{N} \ln \left(\frac{{M_i}^{-\beta_g - 1} e^{-\frac{M_i}{M_{cg}}}}{{M_{cg}}^{-\beta_g} \Gamma\left(-\beta_g, \frac{M_t}{M_{cg}}\right)} \right)$$

$$= N \left[\beta_g \ln M_{cg} - \ln \Gamma\left(-\beta_g, \frac{M_t}{M_{cg}}\right) \right] - (1 + \beta_g) \sum_{i=1}^{N} \ln M_i \tag{4-12}$$

$$- \frac{1}{M_{cg}} \sum_{i=1}^{N} M_i$$

コメントの追加 [f33]: Kagan [1991]の式(6)と一致．宇津 [1999b]の式(11.146)と一致．

ところで，ガンマ関数には次のような関係が成り立っている．

$$\Gamma(a + 1, x) = a\Gamma(a, x) + x^a e^{-x} \tag{4-13}$$

コメントの追加 [f34]: Kagan [2002, I]の式(15)．本論文の式(4-4)を部分積分すれば確認できる．

式(4-13)を用いて式(4-10)を変形すると，Kagan [2002a]の式(16)及び(17)のような複雑な形になる．

$$\phi(M) = \frac{M^{-\beta_g - 1} e^{-\frac{M}{M_{cg}}}}{{M_{cg}}^{-\beta_g} \Gamma\left(-\beta_g, \frac{M_t}{M_{cg}}\right)}$$

$$= \frac{\beta_g M^{-\beta_g - 1} {M_t}^{\beta_g} e^{\frac{M_t - M}{M_{cg}}}}{1 - \left(\frac{M_t}{M_{cg}}\right)^{\beta_g} e^{\frac{M_t}{M_{cg}}} \Gamma\left(1 - \beta_g, \frac{M_t}{M_{cg}}\right)} \tag{4-14}$$

$$= G^{-1} \frac{\beta_g}{M} \left(\frac{M_t}{M}\right)^{\beta_g} e^{\frac{M_t - M}{M_{cg}}} \quad (M_t \le M \le \infty)$$

コメントの追加 [f35]: Kagan [2002, I]の式(16)

$$G = 1 - \left(\frac{M_t}{M_{cg}}\right)^{\beta_g} e^{\frac{M_t}{M_{cg}}} \Gamma\left(1 - \beta_g, \frac{M_t}{M_{cg}}\right) \tag{4-15}$$

コメントの追加 [f36]: Kagan [2002, I]の式(17)

同様に，Mの相補累積分布関数$\Phi(M)$は，

$$\Phi(M) = \int_{M}^{\infty} \phi(M')dM' = \frac{\Gamma\left(-\beta_g, \frac{M}{M_{cg}}\right)}{\Gamma\left(-\beta_g, \frac{M_t}{M_{cg}}\right)}$$

$$= \frac{-\beta_g{}^{-1}\Gamma\left(1-\beta_g, \frac{M}{M_{cg}}\right) - \left(\frac{M}{M_{cg}}\right)^{-\beta_g} e^{-\frac{M}{M_{cg}}}}{-\beta_g{}^{-1}\Gamma\left(1-\beta_g, \frac{M_t}{M_{cg}}\right) - \left(\frac{M_t}{M_{cg}}\right)^{-\beta_g} e^{-\frac{M_t}{M_{cg}}}} \tag{4-16}$$

$$= G^{-1}\left(\frac{M_t}{M}\right)^{\beta_g} e^{\frac{M_t - M}{M_{cg}}} \left\{1 - \left(\frac{M}{M_{cg}}\right)^{\beta_g} e^{\frac{M}{M_{cg}}} \Gamma\left(1-\beta_g, \frac{M}{M_{cg}}\right)\right\}$$

コメントの追加 [f37]: Kagan [2002, I]の式(19)と一致．

となり，*Kagan* [2002a]式(19)と一致する．対数尤度$\ln L$は，式(4-14)を用いると，

$$\ln L = \sum_{i=1}^{N} \ln \phi(M_i) = \sum_{i=1}^{N} \ln\left(G^{-1} \frac{\beta_g}{M}\left(\frac{M_t}{M}\right)^{\beta_g} e^{\frac{M_t - M}{M_{cg}}}\right)$$

$$= N\left[\beta_g \ln M_t + \ln \beta_g - \ln G\right] + \frac{NM_t - \sum_{i=1}^{N} M_i}{M_{cg}} \tag{4-17}$$

$$- (1+\beta_g)\sum_{i=1}^{N} \ln M_i$$

コメントの追加 [f38]: Kagan [2002, I]の式(38)と一致．ただし，式(38)の lnC の符号は誤り．

となり，Kagan [2002a]の式(38)と一致する（ただし，式(38)の$\ln C$の符号は誤り）．Kagan [2002a]が簡単な形の式(4-10)〜(4-11)ではなく，複雑な形の式(4-14)〜(4-16)を用いたのは，4.5 節で紹介する Tapered G-R 則の式(5-1)〜(5-2)の形に似せて，対比を明確にするためと思われる．

4.5. Tapered G-R 則

4.5.1. Tapered G-R 則のモーメント表現

4.1-4.4 節で示した分布関数はマグニチュードの関係式に基づいている．一方，ここで取り上げる Tapered G-R 則［Vere-Jones et al., 2001; Kagan, 2002a］はマグニチュードの関係式が不明である．モーメントの関係式については Kagan [2002a]に提示されているため，関数のチェックとともにマグニチュードで表現した場合の式の算出を示す．

Kagan [2002a]の式(12)によれば，Mの確率密度関数$\phi(M)$は，

Hirose, F., K. Maeda, and Y. Yoshida (2019), Maximum magnitude of subduction earthquakes along the Japan-Kuril-Kamchatka trench estimated from seismic moment conservation, Geophys. J. Int., 219, 1590-1612, doi:10.1093/gji/ggz381.の簡易和訳版

$$\phi(M) = \left[\frac{\beta_{ta}}{M} + \frac{1}{M_{cta}}\right]\left(\frac{M_t}{M}\right)^{\beta_{ta}} e^{\frac{M_t - M}{M_{cta}}} \qquad (M_t \le M \le \infty) \tag{5-1}$$

ここで，β_{ta}及びM_{cta}は定数である．M_{cta}は分布曲線を規定する（コーナーモーメント）パラメータで，ガンマ分布のM_{cg}と同様の性質を持つ．切断 G-R 則のM_{ctr}や宇津の式のM_{cu}のように上限のモーメントを示すものではないことに注意が必要である．式(5-1)が正しいとした場合，Mの相補累積分布関数$\Phi(M)$は，

$$\begin{aligned}\Phi(M) &= \int_M^{\infty} \phi(M')dM' = M_t{}^{\beta_{ta}} e^{\frac{M_t}{M_{cta}}} \int_M^{\infty} \left(\frac{\beta_{ta}}{M'} + \frac{1}{M_{cta}}\right) M'^{-\beta_{ta}} e^{-\frac{M'}{M_{cta}}} dM' \\ &= M_t{}^{\beta_{ta}} M^{-\beta_{ta}} e^{\frac{M_t - M}{M_{cta}}} \qquad (M_t \le M \le \infty)\end{aligned} \tag{5-2}$$

となり，Kagan [2002a]の式(11)と一致することが確認できる．G-R 則の式(1-17)と比較すると，指数関数のテーパーがかかっている．なお，M_{cta}が∞の場合，G-R 則の式(1-17)と一致する．

対数尤度$\ln L$は，

$$\begin{aligned}\ln L &= \sum_{i=1}^{N} \ln \phi(M_i) = \sum_{i=1}^{N} \ln \left(\left[\frac{\beta_{ta}}{M_i} + \frac{1}{M_{cta}}\right] \left(\frac{M_t}{M_i}\right)^{\beta_{ta}} e^{\frac{M_t - M_i}{M_{cta}}} \right) \\ &= N\beta_{ta} \ln M_t + \frac{1}{M_{cta}} \left(N M_t - \sum_{i=1}^{N} M_i \right) - \beta_{ta} \sum_{i=1}^{N} \ln M_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N} \ln \left(\frac{\beta_{ta}}{M_i} + \frac{1}{M_{cta}} \right)\end{aligned} \tag{5-3}$$

4.5.2. Tapered G-R 則のマグニチュード表現

モーメントの式(5-2)からマグニチュードの関係式を算出する．まず，$x = m - m_t$とMの関係は，式(0-2)より，

$$\frac{M}{M_t} = 10^{1.5x} \tag{5-4}$$

同様に，M_{cta}に対応するマグニチュードm_{cta}について$x_{cta} = m_{cta} - m_t$と置くと，

$$\frac{M_{cta}}{M_t} = 10^{1.5x_{cta}} \tag{5-5}$$

である．式(5-2)，(5-4)，(5-5)より，

コメントの追加 [f39]: Kagan [2002, I]の式(12)

コメントの追加 [f40]: Kagan [2002, I]の式(11)

コメントの追加 [f41]: Kagan [2002, I]の式(37)と一致．

$$\Phi(M) = {M_t}^{\beta_{ta}} M^{-\beta_{ta}} e^{\frac{M_t - M}{M_{cta}}} = \left(\frac{M}{M_t}\right)^{-\beta_{ta}} e^{\frac{1-\frac{M}{M_t}}{\frac{M_{cta}}{M_t}}} = (10^{1.5x})^{-\beta_{ta}} e^{\frac{1-10^{1.5x}}{10^{1.5x_{cta}}}} \tag{5-6}$$

$$= 10^{-b_{ta}x} e^{\frac{1-10^{1.5x}}{10^{1.5x_{cta}}}} = e^{-B_{ta}x} e^{\frac{1-10^{1.5x}}{10^{1.5x_{cta}}}} = \mathrm{F}(x)$$

ここで，$\beta_{ta} = \frac{b_{ta}}{1.5}$，$B_{ta} = b_{ta} \ln 10$である

xの確率密度関数$f(x)$は，

$$f(x) = -\frac{\partial \mathrm{F}(x)}{\partial x} = e^{-B_{ta}x} e^{\frac{1-10^{1.5x}}{10^{1.5x_{cta}}}} \left(B_{ta} + \frac{10^{1.5x}}{10^{1.5x_{cta}}} 1.5 \ln 10 \right) \tag{5-7}$$

となる．なお，x_{cta}が∞の場合，G-R 則の式(1-4)と一致する．

式(1-6)と式(5-6)から$N_m(m)$が求まり, 式(1-18)と式(5-6)から$N_M(M)$が求まる. さらに, 式(1-4)と式(5-7)から$n_m(m)$が求まり，式(1-19)と式(5-1)から$n_M(M)$が求まる．

4.6. 地震モーメント解放率

4.1–4.5 節で各則の$\phi(M)$及び$\Phi(M)$を導出した．これを用いて観測値分布を各則で近似した場合の総地震モーメント解放率$\dot{M}_s$を求める．まずM_t以上の総地震モーメント解放量$M_s(M_t)$は次のように表せる．

$$M_s(M_t) = \sum_{i=1}^{N} M_i = N_M(M_t)\mathrm{E}[M] = N_M(M_t) I_1(M_t) \tag{6-1}$$

ここでE$[M]$はM_iの平均値，$I_1(M_t)$はM_t以上の地震モーメントの 1 次の統計モーメントであり，用いる各則によって次のように表せる．

$$I_1(M_t) \approx \int_{M_t}^{M_{\max}} M' \phi(M') dM' \tag{6-2}$$

コメントの追加 [F42]: 式(6-1)は観測データだが，式(6-2)はモデルのため．

ここで，積分の上限（$M_{\max}$）は用いる則によって異なる．上限が∞となるのは，G-R 則，ガンマ分布，Tapered G-R 則である．一方，切断 G-R 則の上限はM_{ctr}，宇津の式の上限はM_{cu}である．

M_t以上の総地震モーメント解放率$\dot{M}_s(M_t)$は，式(6-1)より次のように表せる．

$$\dot{M}_s(M_t) = \dot{N}_M(M_t) I_1(M_t) \tag{6-3}$$

ここで，$\dot{N}_M(M_t)$はM_t以上の地震の発生率である．任意の地震モーメントM_0を導入すると，$\dot{N}_M(M_t)$は式(1-18)より次のように表せる．

$$\dot{N}_M(M_t) = \frac{\dot{N}_M(M_0)}{\Phi(M_0)} = \frac{\alpha_0}{\Phi(M_0)} \tag{6-4}$$

ここで$\dot{N}_M(M_0) = \alpha_0$とした．ここで$M_0$及び$\alpha_0$を導入したのは，後述の総地震モーメント解放率$\dot{M}_s$の式をスマートにするための工夫である．

式(6-2)及び各則の$\phi(M)$の式（式(1-16)，(2-11)，(3-11)，(4-10)または(4-14)，(5-1)）から各則の$I_1(M_t)$はそれぞれ次のように求まる．

G-R 則：

$$I_1(M_t) = \int_{M_t}^{\infty} M'\phi(M')dM' = \int_{M_t}^{\infty} M'\beta {M_t}^{\beta} M'^{-\beta-1}dM'$$

$$= \beta {M_t}^{\beta} \int_{M_t}^{\infty} M'^{-\beta}dM'$$

$$= \begin{cases} \beta {M_t}^{\beta}\left[\dfrac{1}{1-\beta}M'^{1-\beta}\right]_{M_t}^{\infty} = \dfrac{\beta}{\beta-1}M_t & (\beta > 1) \\ M_t[\ln M']_{M_t}^{\infty} = \infty & (\beta = 1) \\ \beta {M_t}^{\beta}\left[\dfrac{1}{1-\beta}M'^{1-\beta}\right]_{M_t}^{\infty} = \infty & (\beta < 1) \end{cases} \tag{6-5}$$

切断 G-R 則：

$$I_1(M_t) = \int_{M_t}^{M_{ctr}} M'\phi(M')dM' = \int_{M_t}^{M_{ctr}} M' \frac{\beta_{tr} {M_t}^{\beta_{tr}} M'^{-\beta_{tr}-1}}{1-\left(\frac{M_{ctr}}{M_t}\right)^{-\beta_{tr}}} dM'$$

$$= \frac{\beta_{tr} {M_t}^{\beta_{tr}}}{1-\left(\frac{M_{ctr}}{M_t}\right)^{-\beta_{tr}}} \int_{M_t}^{M_{ctr}} M'^{-\beta_{tr}}dM' \tag{6-6}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\beta_{tr}}{1-\beta_{tr}} \dfrac{{M_t}^{\beta_{tr}} M_{ctr} - M_t {M_{ctr}}^{\beta_{tr}}}{{M_{ctr}}^{\beta_{tr}} - {M_t}^{\beta_{tr}}} & (\beta_{tr} \neq 1) \\ \dfrac{M_t M_{ctr}}{M_{ctr} - M_t} \ln \dfrac{M_{ctr}}{M_t} & (\beta_{tr} = 1) \end{cases}$$

宇津の式：

コメントの追加 [弘瀬43]: 例えば，切断 G-R 則でM_0及びα_0を導入しない場合，M_tに関する箇所に違いはなく，係数が異なるだけである．

導入なし：$\frac{10^{a_{tr}+6.0b_{tr}}}{1.5\ln 10}\frac{1}{1-\beta_{tr}}$

導入あり：$\frac{\alpha_0\beta_{tr}}{1-\beta_{tr}}\frac{1}{{M_0}^{-\beta_{tr}}-{M_{ctr}}^{-\beta_{tr}}}$

コメントの追加 [F44]: Kagan [2002, I]の式(10)のk=1 としたものと一致．

$$I_1(M_t) = \int_{M_t}^{M_{cu}} M'\phi(M')dM' = \int_{M_t}^{M_{cu}} M'\beta_u {M_t}^{\beta_u} M'^{-\beta_u-1} \frac{\log\frac{M_{cu}}{M'}}{\log\frac{M_{cu}}{M_t} - \frac{1-\left(\frac{M_{cu}}{M_t}\right)^{-\beta_u}}{\beta_u \ln 10}} dM'$$

$$= \frac{\beta_u {M_t}^{\beta_u}}{\log\frac{M_{cu}}{M_t} - \frac{1-\left(\frac{M_{cu}}{M_t}\right)^{-\beta_u}}{\beta_u \ln 10}} \int_{M_t}^{M_{cu}} M'^{-\beta_u} \log\frac{M_{cu}}{M'} dM' \qquad (6\text{-}7)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\beta_u}{1-\beta_u} \dfrac{\frac{{M_t}^{\beta_u}{M_{cu}}^{1-\beta_u} - M_t}{(1-\beta_u)\ln 10} - M_t \log\frac{M_{cu}}{M_t}}{\log\frac{M_{cu}}{M_t} - \frac{1-\left(\frac{M_{cu}}{M_t}\right)^{-\beta_u}}{\beta_u \ln 10}} & (\beta_u \neq 1) \\ \dfrac{M_t}{\log\frac{M_{cu}}{M_t} - \frac{1-\left(\frac{M_{cu}}{M_t}\right)^{-1}}{\ln 10}} \left\{ -\ln M_t \log\frac{M_{cu}}{M_t} + \frac{(\ln M_{cu})^2 - (\ln M_t)^2}{2\ln 10} \right\} & (\beta_u = 1) \end{cases}$$

ガンマ分布：

$$I_1(M_t) = \int_{M_t}^{\infty} M'\phi(M')dM' = \int_{M_t}^{\infty} M' \frac{M'^{-\beta_g-1} e^{-\frac{M'}{M_{cg}}}}{{M_{cg}}^{-\beta_g} \Gamma\left(-\beta_g, \frac{M_t}{M_{cg}}\right)} dM'$$

$$= \frac{M_{cg}\Gamma\left(1-\beta_g, \frac{M_t}{M_{cg}}\right)}{\Gamma\left(-\beta_g, \frac{M_t}{M_{cg}}\right)} \qquad (6\text{-}8)$$

$$= \frac{\beta_g {M_t}^{\beta_g}}{1-\beta_g} {M_{cg}}^{1-\beta_g} \Gamma\left(2-\beta_g, \frac{M_t}{M_{cg}}\right) e^{\frac{M_t}{M_{cg}}} G^{-1}$$

$$- \frac{\beta_g}{1-\beta_g} M_t G^{-1} \qquad (\beta_g \neq 1)$$

ここで，最後の式は式(4-13)で変換したものである．$\beta_g = 1$のケースについては省略する．

Tapered G-R 則：

$$I_1(M_t) = \int_{M_t}^{\infty} M'\phi(M')dM' = \int_{M_t}^{\infty} M' \left[\frac{\beta_{ta}}{M'} + \frac{1}{M_{cta}}\right] \left(\frac{M_t}{M'}\right)^{\beta_{ta}} e^{\frac{M_t - M'}{M_{cta}}} dM'$$

$$= \frac{{M_t}^{\beta_{ta}}}{1-\beta_{ta}} {M_{cta}}^{1-\beta_{ta}} \Gamma\left(2-\beta_{ta}, \frac{M_t}{M_{cta}}\right) e^{\frac{M_t}{M_{cta}}} \qquad (6\text{-}9)$$

$$- \frac{\beta_{ta}}{1-\beta_{ta}} M_t \qquad (\beta_{ta} \neq 1)$$

$\beta_{ta} = 1$のケースについては省略する．

M_t未満も含めた全ての地震の総地震モーメント解放率$\dot{M}_s$は，式(6-3)でM_tをゼロにリ

コメントの追加 [f45]: 2 行目の簡単な式を式(4-13)で変換すれば，Kagan [2002, I]の式(20)の k=1 としたものと一致.

コメントの追加 [f46]: Kagan [2002, I]の式(13)の k=1 としたものと一致.

ミットすればよく，次のように表せる．

$$\dot{M}_s = \lim_{M_t \to 0}\left[\dot{N}_M(M_t) I_1(M_t)\right] = \lim_{M_t \to 0}\left[\frac{\alpha_0}{\Phi(M_0)} I_1(M_t)\right] \tag{6-10}$$

よって，各則の$\dot{M}_s$はそれぞれ次のように求まる．

式(1-17)及び(6-5)より，G-R 則の$\dot{M}_s$は，

$$\begin{aligned}
\dot{M}_s &= \lim_{M_t \to 0}\left[\frac{\alpha_0}{\Phi(M_0)} I_1(M_t)\right] \\
&= \alpha_0 \lim_{M_t \to 0}\left[\frac{\int_{M_t}^{\infty} M'^{-\beta} dM'}{\int_{M_0}^{\infty} M'^{-\beta-1} dM'}\right] \\
&= \begin{cases} \alpha_0 \lim_{M_t \to 0}\left[\dfrac{\left[\frac{1}{1-\beta}(M')^{1-\beta}\right]_{M_t}^{\infty}}{\left[-\frac{1}{\beta}(M')^{-\beta}\right]_{M_0}^{\infty}}\right] = \infty & (\beta \neq 1) \\ \alpha_0 \lim_{M_t \to 0}\left[\dfrac{[\ln M']_{M_t}^{\infty}}{[-(M')^{-1}]_{M_0}^{\infty}}\right] = \infty & (\beta = 1) \end{cases}
\end{aligned} \tag{6-11}$$

以下，G-R 則を除く 4 つの則の$\dot{M}_s$については，各則のβシリーズ（$\beta_{tr}, \beta_u, \beta_g, \beta_{ta}$）が 1 以上のケースでは発散するため，$\beta$シリーズが 1 未満のケースについて示す．

式(2-12)及び(6-6)より，切断 G-R 則の$\dot{M}_s$は，

$$\begin{aligned}
\dot{M}_s &= \lim_{M_t \to 0}\left[\frac{\alpha_0}{\Phi(M_0)} I_1(M_t)\right] \\
&= \lim_{M_t \to 0}\left[\frac{\alpha_0}{\dfrac{M_0{}^{-\beta_{tr}} - M_{ctr}{}^{-\beta_{tr}}}{M_t{}^{-\beta_{tr}} - M_{ctr}{}^{-\beta_{tr}}}} \frac{\beta_{tr}}{1-\beta_{tr}} \frac{M_t{}^{\beta_{tr}} M_{ctr} - M_t M_{ctr}{}^{\beta_{tr}}}{M_{ctr}{}^{\beta_{tr}} - M_t{}^{\beta_{tr}}}\right] \\
&= \frac{\alpha_0 \beta_{tr}}{1-\beta_{tr}} \lim_{M_t \to 0}\left[\left(\frac{M_t}{M_0}\right)^{-\beta_{tr}} \frac{1-\left(\dfrac{M_t}{M_{ctr}}\right)^{\beta_{tr}}}{1-\left(\dfrac{M_0}{M_{ctr}}\right)^{\beta_{tr}}} M_t{}^{\beta_{tr}} M_{ctr}{}^{\beta_{tr}} \frac{M_{ctr}{}^{1-\beta_{tr}} - M_t{}^{1-\beta_{tr}}}{M_{ctr}{}^{\beta_{tr}} - M_t{}^{\beta_{tr}}}\right] \\
&= \frac{\alpha_0 \beta_{tr}}{1-\beta_{tr}} M_0{}^{\beta_{tr}} M_{ctr}{}^{1-\beta_{tr}} \frac{M_{ctr}{}^{\beta_{tr}}}{M_{ctr}{}^{\beta_{tr}} - M_0{}^{\beta_{tr}}} \qquad (\beta_{tr} < 1)
\end{aligned} \tag{6-12}$$

式(3-12)及び(6-7)より，宇津の式の$\dot{M}_s$は，

$$\dot{M}_s = \lim_{M_t \to 0}\left[\frac{\alpha_0}{\Phi(M_0)} I_1(M_t)\right] = \tag{6-13}$$

コメントの追加 [F47]: $\phi(M) = \beta M_t{}^{\beta} M^{-\beta-1}$

$\Phi(M) = \int_M^{\infty} \phi(M') dM'$

$I_1(M_t) = \int_{M_t}^{\infty} M' \phi(M') dM'$

これらより，

$\dot{M}_s = \lim_{M_t \to 0}\left[\frac{\alpha_0}{\Phi(M_0)} I_1(M_t)\right] = \alpha_0 \lim_{M_t \to 0}\left[\frac{\int_{M_t}^{\infty} M'^{-\beta} dM'}{\int_{M_0}^{\infty} M'^{-\beta-1} dM'}\right]$

$\beta > 1$ または< 1 なら

$= \alpha_0 \lim_{M_t \to 0}\left[\frac{\left[\frac{1}{1-\beta}(M')^{1-\beta}\right]_{M_t}^{\infty}}{\left[-\frac{1}{\beta}(M')^{-\beta}\right]_{M_0}^{\infty}}\right]$ でどちらも∞

$\beta = 1$ なら

$= \alpha_0 \lim_{M_t \to 0}\left[\frac{[\ln M']_{M_t}^{\infty}}{[-(M')^{-1}]_{M_0}^{\infty}}\right]$ で∞

というわけで，どのケースでも∞

コメントの追加 [f48]: Kagan [2002, GJI, II]の式(7), (8)と一致.

Hirose, F., K. Maeda, and Y. Yoshida (2019), Maximum magnitude of subduction earthquakes along the Japan-Kuril-Kamchatka trench estimated from seismic moment conservation, Geophys. J. Int., 219, 1590-1612, doi:10.1093/gji/ggz381.の簡易和訳版

$$\lim_{M_t\to 0}\left[\frac{\alpha_0}{{M_t}^{\beta_u}{M_0}^{-\beta_u}\dfrac{\log\frac{M_{cu}}{M_0}-\frac{1-\left(\frac{M_{cu}}{M_0}\right)^{-\beta_u}}{\beta_u\ln 10}}{\log\frac{M_{cu}}{M_t}-\frac{1-\left(\frac{M_{cu}}{M_t}\right)^{-\beta_u}}{\beta_u\ln 10}}}\frac{\beta_u}{1-\beta_u}\frac{\frac{{M_t}^{\beta_u}{M_{cu}}^{1-\beta_u}-M_t}{(1-\beta_u)\ln 10}-M_t\log\frac{M_{cu}}{M_t}}{\log\frac{M_{cu}}{M_t}-\frac{1-\left(\frac{M_{cu}}{M_t}\right)^{-\beta_u}}{\beta_u\ln 10}}\right]=$$

$$\frac{\frac{\alpha_0\beta_u}{1-\beta_u}{M_0}^{\beta_u}}{\log\frac{M_{cu}}{M_0}-\frac{1-\left(\frac{M_{cu}}{M_0}\right)^{-\beta_u}}{\beta_u\ln 10}}\lim_{M_t\to 0}\left[\frac{{M_{cu}}^{1-\beta_u}-{M_t}^{1-\beta_u}}{(1-\beta_u)\ln 10}-{M_t}^{1-\beta_u}\log\frac{M_{cu}}{M_t}\right]=$$

コメントの追加 [F49]: Mt がゼロリミットをとるとき，この部分はロピタルの定理などからゼロでOK.

$$\frac{\alpha_0\beta_u}{1-\beta_u}{M_0}^{\beta_u}\frac{\frac{{M_{cu}}^{1-\beta_u}}{(1-\beta_u)\ln 10}}{\log\frac{M_{cu}}{M_0}-\frac{1-\left(\frac{M_{cu}}{M_0}\right)^{-\beta_u}}{\beta_u\ln 10}}=$$

$$\frac{\alpha_0{\beta_u}^2}{(1-\beta_u)^2}{M_0}^{\beta_u}{M_{cu}}^{1-\beta_u}\frac{1}{\beta_u\ln 10\cdot\log\frac{M_{cu}}{M_0}-\left\{1-\left(\frac{M_{cu}}{M_0}\right)^{-\beta_u}\right\}}\qquad(\beta_u<1)$$

式(4-11)及び(6-8)より，ガンマ分布の$\dot{M}_s$は，

$$\dot{M}_s=\lim_{M_t\to 0}\left[\frac{\alpha_0}{\Phi(M_0)}I_1(M_t)\right]=\lim_{M_t\to 0}\left[\frac{\alpha_0}{\dfrac{\Gamma\left(-\beta_g,\frac{M_0}{M_{cg}}\right)}{\Gamma\left(-\beta_g,\frac{M_t}{M_{cg}}\right)}}\frac{M_{cg}\Gamma\left(1-\beta_g,\frac{M_t}{M_{cg}}\right)}{\Gamma\left(-\beta_g,\frac{M_t}{M_{cg}}\right)}\right]$$

$$=\frac{\alpha_0M_{cg}\Gamma(1-\beta_g)}{\Gamma\left(-\beta_g,\frac{M_0}{M_{cg}}\right)}\qquad(6\text{-}14)$$

$$=\frac{\alpha_0\beta_g}{1-\beta_g}{M_0}^{\beta_g}{M_{cg}}^{1-\beta_g}\Gamma(2-\beta_g)\frac{e^{\frac{M_0}{M_{cg}}}}{1-\left(\frac{M_0}{M_{cg}}\right)^{\beta_g}e^{\frac{M_0}{M_{cg}}}\Gamma\left(1-\beta_g,\frac{M_0}{M_{cg}}\right)}\qquad(\beta_g<1)$$

コメントの追加 [f50]: 2 行目の簡単な式を式(4-13)で変換すれば，Kagan [2002, GJI, II]の式(7), (10)と一致．ただし，式(10)の C は不要で誤り．

なお，式(6-14)の最後の式は式(4-13)で変換したもので，Kagan [2002b]の式(7)，(10)と対応している（ただし，式(10)のCは不要で誤り）．ここで，$\Gamma(1-\beta_g)$はガンマ関数で，次のように定義される．

$$\Gamma(a) \equiv \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \qquad (a > 0) \tag{6-15}$$

式(5-2)及び(6-9)より，Tapered G-R 則の$\dot{M}_s$は，

$$\begin{aligned}\dot{M}_s &= \lim_{M_t\to 0}\left[\frac{\alpha_0}{\Phi(M_0)} I_1(M_t)\right] \\ &= \lim_{M_t\to 0}\left[\frac{\alpha_0}{{M_t}^{\beta_{ta}} {M_0}^{-\beta_{ta}} e^{\frac{M_t-M_0}{M_{cta}}}} \frac{{M_t}^{\beta_{ta}}}{1-\beta_{ta}} {M_{cta}}^{1-\beta_{ta}} \Gamma\left(2 - \beta_{ta}, \frac{M_t}{M_{cta}}\right) e^{\frac{M_t}{M_{cta}}} - \frac{\beta_{ta}}{1-\beta_{ta}} M_t\right] \\ &= \frac{\alpha_0}{1-\beta_{ta}} {M_0}^{\beta_{ta}} {M_{cta}}^{1-\beta_{ta}} e^{\frac{M_0}{M_{cta}}} \Gamma(2-\beta_{ta}) \qquad (\beta_{ta} < 1)\end{aligned} \tag{6-16}$$

コメントの追加 [f51]: Kagan [2002, GJI, II]の式(7), (9)と一致.

以上，$\dot{M}_s$を任意のM_0とα_0のセットで表すことができるようになった．本研究では，任意のM_0とα_0のセットとして，下限マグニチュード m 5.8 に相当するモーメント$M_{\mathrm{m}5.8}$と$\dot{N}_M(M_{\mathrm{m}5.8})$のセットを$\dot{M}_s$式に与えた．

4.7. パラメータ推定

4.6 節で各則の総地震モーメント解放率$\dot{M}_s$の解析解（式(6-11)〜(6-14)及び(6-16)）を導出した．$\dot{M}_s$と$\dot{M}_T$が等しいと置くことによって，M_cシリーズ（$M_{ctr}, M_{cu}, M_{cg}, M_{cta}$）は$\beta$シリーズ（$\beta_{tr}, \beta_u, \beta_g, \beta_{ta}$）で表すことができる．例えば，切断 G-R 則について具体的に書き下すと，

$$\dot{M}_s = \frac{\alpha_0 \beta_{tr}}{1-\beta_{tr}} {M_0}^{\beta_{tr}} {M_{ctr}}^{1-\beta_{tr}} \frac{{M_{ctr}}^{\beta_{tr}}}{{M_{ctr}}^{\beta_{tr}} - {M_0}^{\beta_{tr}}} = \dot{M}_T = \chi\mu W L V_{pl} \tag{7-1}$$

と表せ，M_{ctr}とβ_{tr}以外の変数は既知である．各則についてのこのような式を，各則の対数尤度$\ln L$の式（式(2-13), (3-13), (4-12), (5-3)）に代入して，$\ln L$を最大にするβシリーズをグリッドサーチ的に探索すれば，M_cシリーズも同時に求まる．M_cシリーズに対応したマグニチュード表現をc_{tr}, c_u, c_g, c_{ta}と表す．

次にパラメータの推定誤差について考える．Wilks [1962]は，対数尤度が自由度kのカイ二乗分布χ_k^2の 1/2 で分布していることを示した．$\dot{M}_s$と$\dot{M}_T$が等しいと置くことにより（ただし，$\dot{M}_s$が発散する G-R 則は除く），本研究で取り扱う則はいずれも自由

度 1 であるから，対数尤度は$\frac{1}{2}\chi_1^2$に従うことになる．上側確率が 5%となるχ_1^2は 3.84 である．言い換えると，95%信頼水準に対応するχ_1^2は 3.84 である．対数尤度が$\frac{1}{2}\chi_1^2$に従うことを考慮して，対数尤度の最大値が 0.0 となるよう正規化し，正規化された対数尤度が-1.92 となる時がパラメータの 95%信頼区間におよそ対応する［自由度 2 の場合は，Kagan, 1997 を参照］．**Fig. 2** に一例を示す．この図は 1977–2017 年に発生した地震活動に切断 G-R 則を適用したときの正規化された対数尤度分布である．図中の括弧内は 95%信頼区間を示す．

モデル間の優劣は AIC［Akaike, 1974］で判断した．

$$\mathrm{AIC} = -2\ln L_{\max} + 2k \tag{7-2}$$

ここで，$\ln L_{\max}$は最大対数尤度，kは自由度で，AIC が小さいほど良いモデルと判断される．

§5. 結果

Fig. 3 は，1977–2010 年（§2 で定義した期間①）及び 1977–2017 年（§2 で定義した期間③）に発生した地震の規模別頻度分布と，それに対してモーメント保存則を適用して得られた各則の分布を示している．ただし，G-R 則については，$\dot{M}_S$が発散する（式(6-11)）ため，モーメント保存則ではなく式(1-12)を適用して得られた分布である．各則とも観測データが存在する範囲内ではよく一致している．しかし，地球は有限であるため，データの蓄積とともに本質的に上に凸となる分布へ漸近すると考えられる．上に凸の分布を示す 4 つの則のうち，どの則が妥当であるかをこの図から判断するのは難しいが，本研究では，この限られた地震データからでもテクトニックモーメントを仮定し，モーメント保存則を適用することで各則のパラメータを推定することができる．**Fig. 4** は，**Fig. 3** の縦軸を各 bin の個数 × モーメントに置き換え，各期間で割って 1 年あたりに換算したものである．理論曲線で囲まれた面積が$\dot{M}_S$であり，$\dot{M}_T$と等しい．規模の小さな（大きな）イベントは個数が多い（少ない）（**Fig. 3**）が，全モーメントに占める割合は小さい（大きい）ことがわかる．いずれの則においても，m 7 後半からデータと理論曲線との乖離が大きくなっているが，これは今後地震データの蓄積とともに小さくなっていくものと期待される．1977–2010 年（期間①）のデータを用いて推定された最大規模については，切断 G-R

則では m 9.92，宇津の式では m 10.65 である（**Fig. 3a**）．ガンマ分布と Tapered G-R 則のコーナーパラメータは 10.00 と 9.65 である（**Fig. 3a**）．本領域では直後の 2011 年 3 月 11 日に東北沖地震（m 9.2）が発生している．観測値（m 9.2）は切断 G-R 則や宇津の式による推定最大規模（m 9.92, 10.65）よりも十分小さいため，回顧的ではあるが，予測された最大規模の範囲内である．

各期間で推定された各則のβシリーズ（$\beta_{tr}, \beta_u, \beta_g, \beta_{ta}$）及び$c$シリーズ（$c_{tr}, c_u, c_g, c_{ta}$）を **Table 2** に示す．

Fig. 5 は，切断 G-R 則及び宇津の式から推定された最大規模（c_{tr}, c_u）の時間的変遷を示す．宇津の式は切断 G-R 則よりも常に 0.7–0.8 程度大きい値を示す．これは，宇津の式の方が，m 9 付近の地震モーメント解放率が低く，総地震モーメント解放率を稼ぐために，最大規模（c_u）が大きくなるのである（**Fig. 4**）．時間変化をみると，東北沖地震の発生の影響は小さく，Kagan and Jackson [2013]が指摘したような，最大クラスの地震前後で最大規模の推定値が大きく変化するということはなかった．本研究で用いたモーメント保存則では，一般に地震発生率α_0が大きく，βシリーズ（β_{tr}, β_u）が小さくなれば，最大規模（c_{tr}, c_u）は小さくなる．m 5.8 以上の地震発生率については，期間①では 9.7（=330 個/34 年），期間③では 10.7（=438 個/41 年）であるため，最大規模は小さくなるセンスである．一方，βシリーズについては，期間①よりも期間③の方が大きいため，最大規模は大きくなるセンスである．これら相反する影響により，結果的に，期間①よりも期間③の最大規模の方がやや大きくなる．パラメータの推定誤差は，東北沖地震前後で大差ない（**Table 2**）．AIC については，東北沖地震前は宇津の式の方が 0.3 小さく，逆に東北沖地震後は切断 G-R 則の方が 0.4 小さい．このように AIC の差はほとんどないため，モデル間の優劣は付け難い．ただし，95%の信頼区間の幅は，切断 G-R 則の方が常に宇津の式より 0.3 程度小さい．

Fig. 6 は，ガンマ分布及び Tapered G-R 則を規定するパラメータ（c_g, c_{ta}）を **Fig. 5** に重ねたものである．追加されたガンマ分布は切断 G-R 則とほとんど差はないが，Tapered G-R 則は切断 G-R 則より 0.3 程度小さい傾向がある．Tapered G-R 則の c 値が最も小さい．

§6. 議論

1 節でも触れたように，Tapered G-R 則やガンマ分布は，それらのパラメータであるc_gやc_{ta}より大きな規模の地震の発生を許している．このことから，ガンマ分布や Tapered G-R 則から推定されたパラメータを最大規模としてそのまま扱うのは問題がある．一方，切断 G-R 則や宇津の式は，それらのパラメータであるc_{tr}やc_uより大きな規模の地震は発生しない．そこで以下では，切断 G-R 則及び宇津の式について取り上げるが，特にパラメータの推定誤差がより小さい切断 G-R 則で推定されたパラメータに注目して議論する．

最大規模は東北沖地震後（1977–2017 年）のデータに切断 G-R 則を適用した場合には 10.09 と推定された（**Fig. 5**）．データ期間 41 年間において，切断 G-R 則から推定される *m* 9.95 以上の期待値は約 0.01 個（**Fig. 3b**）であるため，平均再来間隔は 4 千年程度である．仮に，ここで求めた最大規模の平均再来間隔の期間（4 千年間）に蓄積されたテクトニックモーメントを 1 回の地震で解放するとした場合，*m* 10.6 となる．しかし，本研究で用いた手法の通り，中規模地震によるモーメント解放量も全て考慮することで，最大規模の過大評価を避けることができる．

東北沖地震クラスの地震（*m* 9.15 以上）の期待値は 0.2 個/41 年間であるため，全域における平均再来間隔は 200 年程度と推定される．地震調査研究推進本部地震調査委員会 [2011]は，津波堆積物の分布から，東北沖地震型の巨大地震が東北沖において過去 2500 年間に 5 回(うち 1 回は 869 年貞観地震[Namegaya and Satake, 2014]）発生したとして，平均発生間隔を 600 年程度と推定した．一方，本手法では東北沖領域（長さ 500 km × 幅 200 km）は，日本海溝～千島・カムチャッカ海溝沿いの約 1/6 の面積に相当するため，空間的に発生率の偏りがなければ，東北沖領域での平均再来間隔は 1200 年と見積もられ，地震調査研究推進本部地震調査委員会 [2011] の推定の 2 倍となっている．869 年貞観地震と 2011 年東北沖地震の間に発生したと考えられる 15 世紀の地震についての情報は乏しい．もしも，15 世紀の地震の規模が貞観地震や東北沖地震に比べて一回り小さく，例えば *m* 8.85 程度だとして本手法で平均再来間隔を計算すると 600 年程度となり，観測と矛盾しない．

千島海溝沿いについては，17 世紀に北海道沖で *m* 8.8 の地震[Ioki and Tanioka, 2016]が発生したと考えられており，津波堆積物調査から，同規模の地震の発生間隔は約

400 年と推定されている［地震調査研究推進本部地震調査委員会, 2017］．切断 G-R 則による m 8.75 以上の期待値は約 0.54 個/41 年間であるため，全域における平均再来間隔は 80 年程度と推定される．北海道沖領域（長さ 300 km × 幅 130 km）は，全解析領域の約 1/15 の面積に相当するため，北海道沖領域での平均発生間隔は 1200 年と見積もられ，先行研究［地震調査研究推進本部地震調査委員会, 2017］による推定の約 3 倍となっている．平均再来間隔が 400 年となるのは，モーメント保存則によると m 8.3～8.4 程度の地震である．

Murotani et al. [2013]は，日本周辺の m 7–8 クラスのプレート境界型地震及び世界の巨大地震から種々のスケーリング則を導いた．破壊エリアS [km^2]と地震モーメントのスケーリング則$S = 1.34 \times 10^{-10} M^{2/3}$を用いると，今回解析対象とした領域をすべて破壊する地震は m 9.8 と推定され，本研究の推定値よりやや小さい．ただ Murotani et al. [2013]では解析に用いた m 9 以上の地震は 4 個と少なく，最大の地震は m 9.2 であるため，このスケーリング則がどこまで成り立つかは不明である．なお，このスケーリング則の下では，対象領域を大きくしていくと最大規模は際限なく大きくなるが，本手法では，必ずしも大きく推定されないことが特徴のひとつである．ちなみに，宇津の式に基づく最大規模推定は，Murotani et al. [2013]によるスケーリング則から期待される最大規模より遥かに大きく外れており，岩石の強度の限界を考えると過大な推定と思われる．

ここまでプレート間カップリング率 70%を用いた場合の結果について述べてきた．しかしカップリング率の推定に用いられた観測期間が十分長いとは言えず，任意性の強いパラメータである．そこで，カップリング率を 10, 20, …, 100%と変えた場合に推定される最大規模の変化を **Fig. 7** に示す．カップリング率の増加とともに最大規模は単調増加する．切断 G-R 則は常に宇津の式よりも 0.7–0.9 程度小さい．カップリング率 10–20%を仮定した場合に切断 G-R 則から推定される最大規模は観測最大規模である東北沖地震の 9.2 より小さいため，切断 G-R 則に基づくとカップリング率は 30%より大きいと推測される．この結果は，プレート間カップリング率の推定の一助になるかもしれない．また，(あり得ないことと考えられるが) 仮にカップリング率が 100%であったとしても最大規模は 10.38 である．このときの 95%信頼区間は 9.65–10.73 と幅を持っているが，この情報は防災を考える上で有益な目安とな

り得るだろう．

本研究で採用したプレート収束速度のモデルは MORVEL［DeMets et al., 2010］である．この他にもプレート収束速度モデルはいくつか提案されており，例えば REVEL［Shella et al., 2002］を採用した場合，東北沖領域のプレート収束速度は 7.22–7.42 cm/y となる．これは MOVEL（9.20–9.32 cm/y）の 8 割程度の大きさであるため，$\dot{M}_T$も 8 割に下がり，その結果として推定される最大規模も下がることになる．

5 節でも触れたように，地震発生率α_0が大きくなれば，最大規模は小さくなる．期間①～③で，m 5.8 以上の地震のα_0は 9.7～11.0 個/年の幅を持つが，より長期のデータでみれば，地震発生率はこの範囲外に落ち着く可能性もある．そこで，β_{tr}を期間③の値に固定し，α_0を 5～15 とした場合について式(7-1)から見積もると，最大規模は 9.82～10.70 の幅を取る．同様に，β_{tr}が小さくなれば，最大規模は小さくなる．期間①～③で，β_{tr}は 0.611～0.641 の幅を持つが，より長期のデータでみれば，β_{tr}はこの範囲外に落ち着く可能性もある．そこで，α_0を期間③の値に固定し，β_{tr}を 0.5～0.7 とした場合について式(7-1)から見積もると，最大規模は 9.20～10.69 となる．

Kagan and Jackson [2013]では，東北沖地震前までのデータにガンマ分布を適用して，東北沖で発生する最大規模（厳密にはc_g）を 9.26 ± 0.29 と推定した．このとき彼らは，深さ 14–40 km に傾斜角 14°を持つ幅 104 km の地震発生層を仮定した．しかし近年，地震性すべりが海溝軸にまで及ぶ事例［Sakaguchi et al., 2011］が報告されており，東北沖についても，東北沖地震で海溝軸付近が最もすべったという報告［Sun et al., 2017］がある．また，3 節でも述べたように，プレート境界型地震の下限は深さ 60 km 付近である［Kita et al., 2010］．これらのこととプレートの折れ曲がり形状を考慮した場合の幅は 249 km となり，104 km は明らかに過小である．そこで，幅を 249 km とし，それ以外は Kagan and Jackson [2013]のパラメータ（$\chi = 50\%$, $\mu = 49$ GPa，$L = 620$ km，$V_{pl} = 11.15$ cm/y，ただし，V_{pl}については彼らの論文中に明記されていない．彼らの Table 1 の Zone number 12a に示された$\dot{M}_T = 1.76 \times 10^{20}$ Nm/y から逆算すると上記の値が得られるが，大き過ぎる値と考えられる）を使用し，東北沖領域の期間①のデータに適用すると，c_gは 9.92, 95%信頼区間は 9.19–11.43 となった．

これまでみてきたように，最大規模の推定には，用いる則は勿論のこと，$\dot{M}_T$を構

成するχ, μ, W, L, V_{pl}などのパラメータの与え方によって結果が大きく変わる．データを蓄積し，より正しいパラメータを用いることがより精度の高い最大規模推定にとって必要不可欠である．

§7. まとめ

モーメント保存則に基づき，日本海溝～千島・カムチャッカ海溝沿いで発生し得る地震の最大規模を推定した．先行研究よりもデータ期間を延ばし，より観測値に適合するパラメータを与え，より確からしい最大規模を規定するパラメータを持つ切断 G-R 則及び宇津の式を適用した．

推定された最大規模は，切断 G-R 則で 10 程度，宇津の式で 11 程度である．2011 年東北沖地震前後で推定された最大規模に大きな変化はなく，最大規模は解析期間が長くなるとともに増加傾向である．宇津の式は切断 G-R 則よりも常に 1 程度大きい値を示す．これは，宇津の式の方が，*m* 9 付近の地震モーメント解放率が低く，総地震モーメント解放率を稼ぐために，最大規模が大きくなるのである．

AIC については，東北沖地震前は宇津の式の方が 0.3 小さく，逆に東北沖地震後は切断 G-R 則の方が 0.4 小さい．しかし AIC の差はほとんどないため，モデル間の優劣はつけ難いが，95%の推定誤差は，切断 G-R 則の方が常に宇津の式より 0.3–0.4 程度小さい．また，宇津の式に基づく最大規模推定は，Murotani et al. [2013]によるスケーリング則から期待される最大規模より遥かに大きく外れており，岩石の強度の限界を考えると過大な推定と思われる．

切断 G-R 則による *m* 9.95 以上の平均再来間隔は 4 千年程度である．また，東北沖領域について，東北沖地震クラスの地震（*m* 9.15 以上）の平均再来間隔は 1200 年程度と推定され，津波堆積物から推定された平均発生間隔 600 年の 2 倍である．仮に，15 世紀の地震の規模が貞観地震や東北沖地震に比べて一回り小さい（*m* 8.85 程度）ようであれば，本手法による平均再来間隔は 600 年となり，観測と矛盾しない．千島海溝沿いについては，17 世紀に北海道沖で発生した地震（*m* 8.75 以上）の平均発生間隔は 1200 年程度と推定され，津波堆積物から推定された平均発生間隔 400 年の 3 倍である．

プレート境界型地震のスケーリング則の下では，対象領域を大きくしていくと最

大規模は際限なく大きくなる．しかし，本研究の手法のように，中規模地震によるモーメント解放量も全て考慮することで，最大規模の過大評価を避けられるというメリットがある．仮にカップリング率が 100%であったとしても最大規模は 10.38 である．この情報は防災を考える上で有益な目安となり得るだろう．

最大規模の推定には，用いる則は勿論のこと，$\dot{M}_T$を構成するχ, μ, W, L, V_{pl}などのパラメータの与え方によって結果が大きく変わる．データを蓄積し，より正しいパラメータを用いることがより精度の高い最大規模推定にとって必要不可欠である．

謝辞

CMT 解カタログは Global CMT Project［https://www.globalcmt.org/CMTfiles.html］から取得しました．スラブの等深線データは USGS［http://earthquake.usgs.gov/data/slab/］及び気象研 Web サイト［http://www.mri-jma.go.jp/Dep/st/member/fhirose/plate/PlateData.html］から取得しました．プレート収束速度の算出には UNAVCO [https://www.unavco.org/]の Plate Motion Calculator を使用しました．図の作成には GMT［Wessel et al., 2013］を使用しました．

文献

Akaike, H., 1974, A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **AC-19**, 716-723.

Bird, P., 2003, An updated digital model of plate boundaries, *Geochem. Geohpys. Geosyst.*, doi: 10.1029/2001GC000252.

Bird, P. and Y. Y. Kagan, 2004, Plate-tectonic analysis of shallow seismicity: Apparent boundary width, beta, corner magnitude, coupled lithosphere thickness, and coupling in seven tectonic settings, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **94**, 2380-2399.

DeMets, C., R. G. Gordon, and D. F. Argus, 2010, Geologically current plate motions, *Geophys. J. Int.*, **181**, 1-80, doi: 10.1111/j.1365-246X.2009.04491.x.

Hirose, F., K. Maeda, and Y. Yoshida (2019), Maximum magnitude of subduction earthquakes along the Japan-Kuril-Kamchatka trench estimated from seismic moment conservation, Geophys. J. Int., 219, 1590-1612, doi:10.1093/gji/ggz381.の簡易和訳版

Dziewonski, A. M., T.-A. Chou, and J. H. Woodhouse, 1981, Determination of earthquake source parameters from waveform data for studies of global and regional seismicity, *J. Geophys. Res.*, **86**, 2825-2852, doi: 10.1029/JB086iB04p02825.

地震調査研究推進本部地震調査委員会, 2011, 三陸沖から房総沖にかけての地震活動の長期評価（第二版）について, <https://www.jishin.go.jp/main/chousa/kaikou_pdf/sanriku_boso_4.pdf>, (2018-04-17).

~~Earthquake Research Committee, 2011, Long-term evaluation of earthquakes from off the Boso to off the Sanriku, the second edition (in Japanese), < https://www.jishin.go.jp/main/chousa/kaikou_pdf/sanriku_boso_4.pdf>, (2018-04-17).~~

地震調査研究推進本部地震調査委員会, 2017, 千島海溝沿いの地震活動の長期評価（第三版）, < https://www.jishin.go.jp/main/chousa/kaikou_pdf/chishima3.pdf>, (2018-06-19).

~~Earthquake Research Committee, 2017, Long-term evaluation of earthquakes along the Kuril trench, the third edition (in Japanese), < https://www.jishin.go.jp/main/chousa/kaikou_pdf/chishima3.pdf>, (2018-06-19).~~

Ekström, G., M. Nettles, and A. M. Dziewonski, 2012, The global CMT project 2004-2010: Centroid-moment tensors for 13,017 earthquakes, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **200-201**, 1-9, doi: 10.1016/j.pepi.2012.04.002.

Gutenberg, B. and C. F. Richter, 1944, Frequency of earthquakes in California, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **34**, 185-188.

Hanks T. C. and H. Kanamori, 1979, A moment magnitude scale, *J. Geophys. Res.*, **84**, 2348-2350.

Hashimoto, C., A. Noda, and M. Matsu'ura, 2012, The Mw9.0 northeast Japan earthquake: total rupture of a basement asperity, *Geophys. J. Int.*, **189**, 1-5, doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.05368.x.

Hayes, G. P., D. J. Wald, and R. L. Johnson, 2012, Slab1.0: A three-dimensional model of global subduction zone geometries, *J. Geophys. Res.*, **117**, B01302, doi: 10.1029/2011JB008524.

Hirose, F., K. Maeda, and Y. Yoshida (2019), Maximum magnitude of subduction earthquakes along the Japan-Kuril-Kamchatka trench estimated from seismic moment conservation, Geophys. J. Int., 219, 1590-1612, doi:10.1093/gji/ggz381.の簡易和訳版

Hirose, F., K. Miyaoka, N. Hayashimoto, T. Yamazaki, and M. Nakamura, 2011, Outline of the 2011 off the Pacific Coast of Tohoku Earthquake (Mw9.0)- Seismicity: Foreshocks, Mainshock, Aftershocks, and Induced Activity -, *Earth Planets Space*, **63**, 513-518.

Igarashi, T., T. Matsuzawa, and A. Hasegawa, 2003, Repeating earthquakes and interplate aseismic slip in the northeastern Japan subduction zone, *J. Geophys. Res.*, **108**, doi: 10.1029/2002JB001920.

Ioki, K. and Y. Tanioka, 2016, Re-estimated fault model of the 17th century great earthquake off Hokkaido using tsunami deposit data, *Earth Planet. Science Lett.*, **433**, 133-138, doi:10.1016/j.epsl.2015.10.009.

Kagan, Y. Y., 1991, Seismic moment distribution, *Geophys. J. Int.*, **106**, 123-134.

Kagan, Y. Y., 1997, Seismic moment-frequency relation for shallow earthquakes: Regional comparison, *J. Geophys. Res.*, **102**, 2835-2852.

Kagan, Y. Y., 2002a, Seismic moment distribution revisited: I. Statistical results, *Geophys. J. Int.*, **148**, 520-541.

Kagan, Y. Y., 2002b, Seismic moment distribution revisited: II. Moment conservation principle, *Geophys. J. Int.*, **149**, 731-754.

Kagan, Y. Y. and D. D. Jackson, 2013, Tohoku Earthquake: A Surprise?, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **103**, 1181-1194, doi: 10.1785/0120120110.

Kanamori, H., 1977, The energy release in great earthquakes, *J. Geophys. Res.*, **82**, 2981-2987.

Kita, S., T. Okada, A. Hasegawa, J. Nakajima, and T. Matsuzawa, 2010, Anomalous deepening of a seismic belt in the upper-plane of the double seismic zone in the Pacific slab beneath the Hokkaido corner: Possible evidence for thermal shielding caused by subducted forearc crust materials, *Earth Planet. Science Lett.*, **290**, 415-426.

馬渕弘靖・大竹政和・佐藤春夫, 2002, 規模別頻度分布の改良 G-R モデルに基づく最大地震規模 Mc のグローバルな分布, *地震 2*, **55**, 261-273.

~~Mabuchi, H., M. Ohtake, and H. Sato, 2002, Global distribution of maximum earthquake magnitude Mc based on a modified G-R model of magnitude-frequency distribution (in Japanese with English abstract), *J. Seism. Soc. Jpn.*, 2, **55**, 261-273.~~

Hirose, F., K. Maeda, and Y. Yoshida (2019), Maximum magnitude of subduction earthquakes along the Japan-Kuril-Kamchatka trench estimated from seismic moment conservation, Geophys. J. Int., 219, 1590-1612, doi:10.1093/gji/ggz381.の簡易和訳版

松澤暢, 2013, 最大地震について, *予知連会報*, **89**, 446-449.

~~Matsuzawa, T., 2013, What is the largest earthquake we should prepare for? (in Japanese), *Report of the Coordinating Committee for Earthquake Prediction*, **89**, 446-449.~~

Murotani, S., K. Satake, and Y. Fujii, 2013, Scaling relations of seismic moment, rupture area, average slip, and asperity size for M~9 subduction-zone earthquakes, *Geophys. Res. Lett.*, **40**, 5057-5074, doi: 10.1022/grl.50976.

Nakajima, J. and A. Hasegawa, 2006, Anomalous low-velocity zone and linear alignment of seismicity along it in the subducted Pacific slab beneath Kanto, Japan: Reactivation of subducted fracture zone?, *Geophys. Res. Lett.*, **33**, L16309, doi: 10.1029/2006GL026773.

Namegaya, Y. and K. Satake, 2014, Reexamination of the A.D. 869 Jogan earthquake size from tsunami deposit distribution, simulated flow depth, and velocity, *Geophys. Res. Lett.*, **41**, 2297–2303, doi: 10.1002/2013GL058678.

Rong, Y., D. D. Jackson, H. Magistrale, and C. Goldfinger, 2014, Magnitude limits of subduction zone earthquakes, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **104**, doi: 10.1785/0120130287.

斎藤正徳・菊地正幸・工藤和男, 1973, 地震の"碁石モデル"の解析解, *地震 2*, **26**, 19-25.

~~Saito, M., M. Kikuchi, and K. Kudo, 1973, Analytical solution of "Go-game model" of earthquake (in Japanese with English abstract), *J. Seism. Soc. Jpn.*, 2, **26**, 19-25.~~

Sakaguchi, A., F. Chester, D. Curewitz, O. Fabbri, D. Goldsby, G. Kimura, C. Li, Y. Masaki, E J. Screaton, A. Tsutsumi, K. Ujiie, and A. Yamaguchi, 2011, Seismic slip propagation to the updip end of plate boundary subduction interface faults: Vitrinite reflectance geothermometry on Integrated Ocean Drilling Program NanTro SEIZE cores, *Geology*, **39**, 395-398, doi: 10.1130/G31642.1.

Savage, J. C., 1983, A dislocation model of strain accumulation and release at a subduction zone, *J. Geophys. Res.*, **88**, 4984-4996.

Shella, G. F., T. H. Dixon, and A. Mao, 2002, REVEL: A model for recent plate velocities from space geodesy, *J. Geophys. Res.*, **107**(B4), 2081, doi: 10.1029/2000JB000033.

Sun, T., K. Wang, T. Fujiwara, S. Kodaira, and J. He, 2017, Large fault slip peaking at

Hirose, F., K. Maeda, and Y. Yoshida (2019), Maximum magnitude of subduction earthquakes along the Japan-Kuril-Kamchatka trench estimated from seismic moment conservation, Geophys. J. Int., 219, 1590-1612, doi:10.1093/gji/ggz381.の簡易和訳版

trench in the 2011 Tohoku-oki earthquake, *Nature Comms.*, doi: 10.1038/ncomms14044.

Uchida, N. and T. Matsuzawa, 2011, Coupling coefficient, hierarchical structure, and earthquake cycle for the source area of the 2011 off the Pacific coast of Tohoku earthquake inferred from small repeating earthquake data, *Earth Planets Space*, **63**, 675-679, doi: 10.5047/eps.2011.07.006.

Uchida, N. and T. Matsuzawa, 2013, Pre- and postseismic slow slip surrounding the 2011 Tohoku-oki earthquake rupture, *Earth Planet. Science Lett.*, **374**, 81-91.

Utsu, T., 1974, A three-parameter formula for magnitude distribution of earthquakes, *J. Phys. Earth*, **22**, 71-85.

宇津徳治, 1978, 地震のマグニチュード分布式のパラメータの推定－最大地震のマグニチュード c を含む場合－, *地震 2*, **31**, 367-382.

~~Utsu, T., 1978, Estimation of parameters in formulas for frequency-magnitude relation of earthquake occurrence: In cases involving a parameter c for the maximum magnitude (in Japanese with English abstract), *J. Seism. Soc. Jpn.*, **31**, 367-382.~~

Utsu, T., 1999a, Representation and analysis of the earthquake size distribution: A historical review and some new approaches, *Pure Appl. Geophys.*, **155**, 509-535.

宇津徳治, 1999b, 地震活動総説, *東京大学出版会*, 876 pp.

~~Utsu, T., 1999b, Seismicity studies: A comprehensive review (in Japanese), *University of Tokyo Press*, 876pp.~~

Vere-Jones, D., R. Robinson, and W. Yang, 2001, Remarks on the accelerated moment release model: problems of model formulation, simulation and estimation, *Geophys. J. Int.*, **144**, 517-531.

Wessel, P., W. H. F. Smith, R. Scharroo, J. Luis, and F. Wobbe, 2013, Generic Mapping Tools: Improved Version Released, *Eos, trans. AGU*, **94**, 409-410, doi: 10.1002/2013EO450001.

Wilks, S. S., 1962, Mathematical statistics, *John Wiley, New York*, 644 pp.

（↑の和訳：田中英之・岩本誠一, 1972, 数理統計学 2, *東京図書株式会社*, 352 pp.）

Figure Captions

Figure 1. 1977～2017 年に日本海溝～千島・カムチャッカ海溝の深さ 70 km 以浅で発生した $m \geq 5.8$ のプレート境界地震の震央．紫破線は PB2002 のプレート境界［Bird 2003］．橙破線と緑破線はそれぞれ Nakajima & Hasegawa [2006]及び Kita et al. [2010]と Hayes et al. [2012]による太平洋スラブの深さコンター [km]．矢印は太平洋プレートとオホーツクプレートの相対収束速度［DeMets et al. 2010］．左上の挿入図は M-T 図（鉛直棒）と回数積算図．右下の挿入図は，a–a'線と b–b'線に沿うプレート境界の鉛直断面（縦横比 1:1）．星は 2011 年東北地方太平洋沖地震の震央．略語：Jt は日本海溝，KKt は千島・カムチャッカ海溝，Hd は北海道地方，Td は東北地方，Kd は関東地方．

Figure 2. 切断 G-R 則の対数尤度比（LLR）関数．最大値を 0.0 で規格化している．括弧内の値は 95%信頼区間の両端であり，β_{tr} については鉛直破線で示す．

Figure 3. 規模別頻度分布．(a) 1977–2010 年，(b) 1977–2017 年．○は個別，●は累積．紫，赤，青，緑，黒はそれぞれ G-R 則，切断 G-R 則，宇津の式，ガンマ分布，Tapered G-R 則を示す．5 つのモデルは実際のデータとほとんど区別がつかない．パラメータの推定値は右上．

Figure 4. モーメント・マグニチュード分布．(a) 1977–2010 年，(b) 1977–2017 年．○は 0.1 幅のマグニチュードにおける 1 年あたりの総モーメント．2011 年東北地方太平洋沖地震(m 9.2)は図の範囲外（図上部の矢印）．紫，赤，青，緑，黒はそれぞれ G-R 則，切断 G-R 則，宇津の式，ガンマ分布，Tapered G-R 則を示す．

Figure 5. 切断 G-R 則（赤）と宇津の式（青）で推定された最大規模．鉛直棒は 95%信頼区間の両端．

Figure 6. c値の時間変化．赤，青，緑，黒はそれぞれ切断 G-R 則，宇津の式，ガン

Hirose, F., K. Maeda, and Y. Yoshida (2019), Maximum magnitude of subduction earthquakes along the Japan-Kuril-Kamchatka trench estimated from seismic moment conservation, Geophys. J. Int., 219, 1590-1612, doi:10.1093/gji/ggz381.の簡易和訳版

マ分布，Tapered G-R 則によるc値の推定値(c_{tr}, c_u, c_g, and c_{ta})．なお，c_gとc_{ta}はコーナーの大きさを定義する単なるパラメータであり，最大規模ではないことに注意．

Figure 7. 異なるプレート間カップリング率の場合の最大規模．切断 G-R 則（赤），宇津の式（青）．期間は 1977～2017 年．

Table Captions

Table 1. 本研究で用いたパラメータ．断層幅 W については，太平洋プレートの傾斜角（**Fig. 1** の挿入図）より千島・カムチャッカ海溝では 173 km，日本海溝では 249 km と推定された．断層長 L については，千島・カムチャッカ海溝沿いで 2200 km，日本海溝沿いで 790 km，計 2990 km である．

Table 2. 本研究で推定されたパラメータ．括弧内の数値は 95%信頼区間の両端．