陰陽グリッド上球面浅水波モデルの特征線解法

*彭　新東[†]，高橋　桂子[†]，肖　鋒[‡]
（†地球シミュレータセンター，‡東工大院）

1.　はじめに

計算機パワーの快速増強と共に、大気非静力モデルは気象研究や数値予報の不可欠となります。モデルの力学部分も物理の部分もより精確、より複雑になっています。計算の時効と計算機資源の節約するためにはより高性能（高精度かつ低計算量）の方法が求められます。そのうち、計算の軽くて精度いい、安定性も強い計算スキームが常に研究開発の目標となっています。

非静力モデルには天気に意味ある遅い波と共に、速い音波も存在します。音波や重力波は数値モデルの計算時間刻みを決めてしまいますので、計算は非常に重くなるわけです。この速い波を安定に計算できるように今現在セミインプリシト法は主に使われています。しかし、時間刻みを伸ばすために重いマトリックスを解く代償を払わなければできません。それで、代わりの方法ないのか？特性線法は一つ有力なキャンディデットです。本文は球面上の浅水波モデルを例とし、速い重力波を対象にして特性線法の応用を紹介します。

2.　球面浅水波モデル

地形を考慮した球面浅水波モデルは一般的に下記の形になります。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h^*}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla h^*+\frac{h^*}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{\partial v\cos\varphi}{\partial\varphi}\right)=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla u-\left(f+\frac{u}{a}\tan\varphi\right)v+\frac{g}{a\cos\varphi}\frac{\partial h}{\partial\lambda}=0,\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla v+\left(f+\frac{u}{a}\tan\varphi\right)u+\frac{g}{a}\frac{\partial h}{\partial\varphi}=0,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

そこで、

$$h=h^*+h_s, \qquad (2)$$

h^*は流体の深さで、h_sが地形高度。

この方程式には流れによる移流、慣性波、重力波などが含まれております。通常、重力波は流れにずいぶん速いですから、時間刻みはほとんど重力波によって決まります。重力を流れと同じように処理できれば、セミラグランジュ計算ができます。計算が安定だけではなくて、重いマトリックスも解かなくて済みます。便利な解法です。

3.　特性線マルチステップ解法

方程式（1）を解くためにまず変形を行います。速度ベクトルは$\vec{W}=\begin{pmatrix}h^* & u & v\end{pmatrix}^T$とすると、(1) が

$$\frac{\partial\vec{W}}{\partial t}+A\frac{\partial\vec{W}}{\partial\lambda}+B\frac{\partial\vec{W}}{\partial\varphi}+\vec{F}=0, \qquad (3)$$

となります。そこでは

$$A=\frac{1}{a\cos\varphi}\begin{pmatrix}u & h^* & 0\\ g & u & 0\\ 0 & 0 & u\end{pmatrix}\quad,\quad B=\frac{1}{a}\begin{pmatrix}v & 0 & h^*\\ 0 & v & 0\\ g & 0 & v\end{pmatrix}\quad,$$

$$\vec{F}=\begin{pmatrix}-\dfrac{h^*v}{a}\tan\varphi\\ -\left(f+\dfrac{u}{a}\tan\varphi\right)v+\dfrac{g}{a\cos\varphi}\dfrac{\partial h_s}{\partial\lambda}\\ \left(f+\dfrac{u}{a}\tan\varphi\right)u+\dfrac{g}{a}\dfrac{\partial h_s}{\partial\varphi}\end{pmatrix}.$$

(3) 式を注目すると、普通の移流式と変わりませんので、セミラグランジュ法で解を求められます。

本文では（3）をスプリットして、マルチステップ解法で求めます。スプリットされた方程式は

$$\frac{\partial\vec{W}}{\partial t}+\vec{F}=0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\vec{W}}{\partial t}+A\frac{\partial\vec{W}}{\partial\lambda}=0, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\vec{W}}{\partial t}+B\frac{\partial\vec{W}}{\partial\varphi}=0, \qquad (6)$$

となります。λ方向方程式（5）を例に整理すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\left(\sqrt{gh^*}+\dfrac{u}{2}\right)}{\partial t}+\Lambda_1^\lambda\frac{\partial\left(\sqrt{gh^*}+\dfrac{u}{2}\right)}{\partial\lambda}=0\\
&\frac{\partial\left(\sqrt{gh^*}-\dfrac{u}{2}\right)}{\partial t}+\Lambda_2^\lambda\frac{\partial\left(\sqrt{gh^*}-\dfrac{u}{2}\right)}{\partial\lambda}=0\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+\Lambda_3^\lambda\frac{\partial v}{\partial\lambda}=0
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

が得られます。$\Lambda_i^\lambda, i=1,2,3$はAの特征値です。

$$\Lambda_1^\lambda=\frac{u+\sqrt{gh^*}}{a\cos\varphi},\Lambda_2^\lambda=\frac{u-\sqrt{gh^*}}{a\cos\varphi},\Lambda_3^\lambda=\frac{u}{a\cos\varphi},$$

重力波と流れ自身が非移流量として、A の特征値（流れと重力波）で流されるのは（7）でわかります。しかも、（7）は純粋な移流方程式ですので、CIP 法で簡単に解けます。Φ 方法は同じ方法で解けます。外力項（F）は中央差分でも計算していいです。

4.　計算条件と計算結果

　Yin-Yang グリッド上で特征線解法を用いて浅水波モデルを積分しました。Williamson テストケース２、５と６を試した結果、安定な計算ができました。本研究では Yin-Yang グリッド境界が線形形式で各ステップに補間します。時間積分はオイラー式の前進で一次精度しか満たせませんが、計算時間が経済的でした。

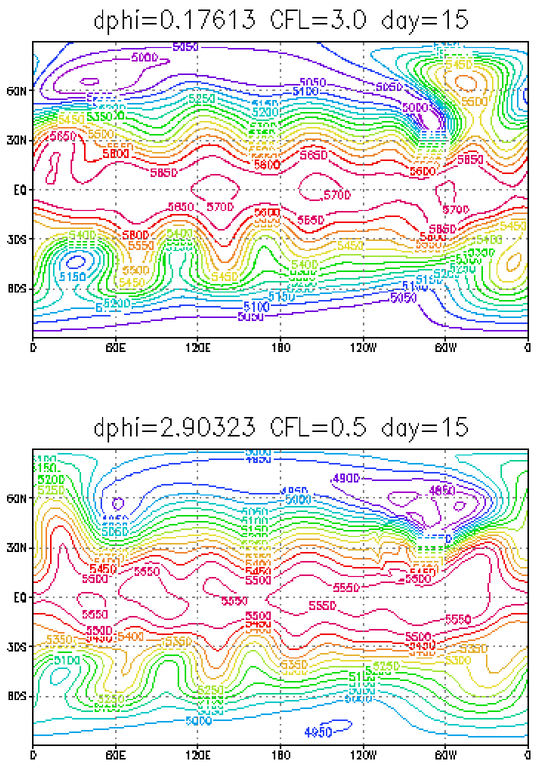

図１　特性線法による Williamson テスト５の計算結果。解像度と Courant 数はタイトルのとおりです。

　図１に示すのは Williamson テスト５の計算結果ですが、低い解像度で小さい Courant 数と高い解像度で大きい Courant 数の実験とも安定で、収束された数値解が得られました。注目したいのは低い解像度の場合、グリッド間隔が大きいですから、大きい時間刻みをとるのは良くない。何故かというと、セミラグランジュ上流点が地球を一周追跡されるから。そして、グリッドスペースが大きいから、Δt もそんなに厳しくないですので、大きい Courant 数を選ぶ必要はないともいえます。逆に、高解像度の場合は大きい Courant 数で計算する必要があります。

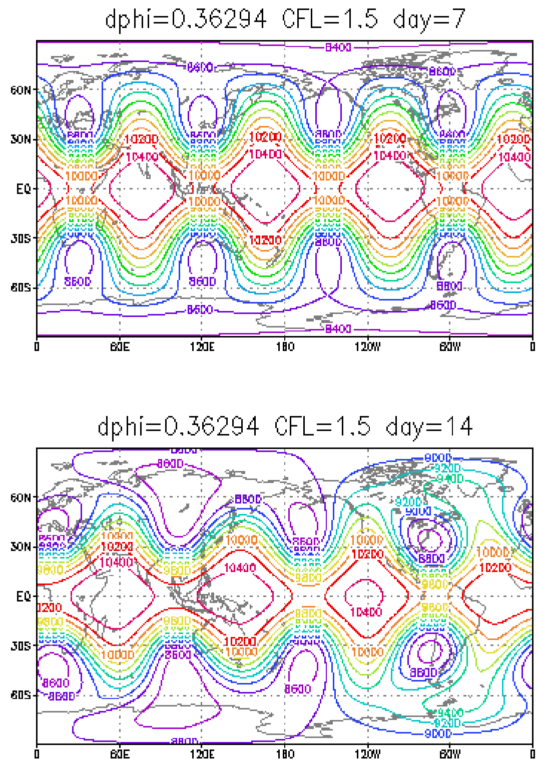

図２　CFL=1.5 で特性線解法による Williamson テスト６の計算結果

　さらに、Williamson テスト６の計算結果を図２に示してあります。結果から見ると、Yin-Yang グリッド境界からの影響が非常に大きいと思われます。特に計算の後半に境界の歪みは広く伝われました。境界の高次補間が要求されます。

5.　まとめ

　浅水波モデルを介して、重力波と流れ自身を一緒に解く特性線法を試しました。この方法で速い波をセミインプリシット的に解くから、セミラグランジュ的に解く方法に切り替え、計算が軽くなりました。そして、高解像度モデルに対しては大きい Courant 数も使えます。検証の結果、モデルの速い成分を解像できるひとつの方法として対モデルに応用する可能性があります。しかし、非静力モデルへの応用は音波項をどういう風に特征方程式に整理するのが問題として残っています。

　Yin-Yang グリッド境界の高次補間や多次元特性方程式の解き方も次の仕事として試して生きたいと思います。