

1.3.2 回転楕円体圧力源による地殻変動

1.3.2.1 はじめに

火山における地殻変動モデルとして、いわゆる「茂木-山川モデル」(山川, 1955; 茂木, 1957) が代表的である。このモデルは、山川 (1955) が導出した、地下の球圧力源による地表面変位の解析解（以下「山川の解」）に基づくものである。一方、圧力源形状が等方的でない場合の地表面変位の解析解として、Davis *et al.* (1974) による擬似回転楕円体状の圧力源による解（以下「Davis の解」）があり、また、山科 (1986) はそれを修正した解（以下「山科の解」）を提出している。

一方、我々は、有限要素法 (finite element method, 以下「FEM」) を用いて回転楕円体圧力源モデルを作成することに成功し、その FE 解析結果を上記の 2 つの解析解と比較した。その結果、いずれの解析解も FE 解析結果とは大きく食い違うことが判明した。

そこで、本稿では、まず Davis の解および山科の解について概観する。次に、FE モデルによる地表面変位を 2 つの解析解と比較し、いずれの解析解も FE 解析結果に合致しないことを示す。そして最後に、FE 解析結果に適合する近似式（実験式）を提案する。

1.3.2.2 Davis の解と山科の解

まず、回転楕円体圧力源による地表面変位を記述する解析解としてこれまでに提出されている Davis の解および山科の解について概観する。

(1) Davis の解

Davis *et al.* (1974) によると、剛性率 μ の半無限均質弾性体内に存在する回転楕円体圧力源（中心深さ D 、長軸 a 、短軸 b 、ただし長軸は z 軸方向）の表面に ΔP の圧力変化が加わった場合、回転楕円体の扁平率 f を

$$f = \frac{a - b}{a} \quad \cdots (1)$$

で定義すると、 z 軸方向に $(1-f) \Delta P$ 、 x 軸および y 軸方向に ΔP というダブルフォースが働く場合と等価であると考えられる（筆者注：これらの方の比 $1-f$ は、回転楕円体を真上から見た場合と真横から見た場合の断面積の比に等しい）。この時、圧力源直上からの水平距離が r の地点にある地表面上の点の上下変位 U_z および水平変位 U_r は、Davis *et al.* (1974) によると次の解析解で表される。なお、ラメの定数 λ は μ に等しいとされている。また、Davis の解による U_z および U_r であることを明確にするため、それぞれ $U_{z(DAV)}$ 、 $U_{r(DAV)}$ と表記する。

$$U_{z(DAV)} = \frac{ab^2 \Delta P}{4\mu} \frac{D}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \left(1 + f - \frac{24}{5} f \frac{D^2}{D^2 + r^2} \right) \quad \cdots (2)$$

$$U_{r(DAV)} = \frac{ab^2 \Delta P}{4\mu} \frac{r}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \left(1 + f - \frac{24}{5} f \frac{D^2}{D^2 + r^2} \right) \quad \cdots (3)$$

ただし、各パラメータを本稿での表記に合わせると共に、若干の式変形を行った。特に、原論文では楕円の扁平率として ε を用いているが、 ε は通常は楕円の離心率 $(a^2 - b^2)^{1/2}/a$ を表すのに用いられるパラメータであり、混同の恐れがあるため、本稿では扁平率を表すパラメータとして通常用いられる f を用いた。

(2) 山科の解

山科 (1986) は上記と同じ前提条件の下で Davis の解を修正し、次の解析解を得た。なお、山科の解による

U_z および U_r であることを明確にするため、それぞれ $U_{z(YMS)}$, $U_{r(YMS)}$ と表記する。

$$U_{z(YMS)} = \frac{3a^3 \Delta P}{4\mu} \frac{D}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{1}{2}f - 3f \frac{D^2}{D^2 + r^2} \right) \quad \cdots (4)$$

$$U_{r(YMS)} = \frac{3a^3 \Delta P}{4\mu} \frac{r}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{1}{2}f - 3f \frac{D^2}{D^2 + r^2} \right) \quad \cdots (5)$$

ここでも各パラメータを本稿での表記に合わせると共に、若干の式変形を行った。また、原論文では $\lambda \neq \mu$ の一般的な場合を示しているが、ここでは Davis の解に合わせて $\lambda = \mu$ とした。本稿では以下、全て $\lambda = \mu$ の場合を扱う。

Davis の解と比べると、右辺の先頭に現れる式全体に掛かる係数と、式の後半部の 2 つの f に掛かる係数が異なっている。

また、山科は、 f は負の値でも構わないとしている。この場合、後述するように、水平に平たい回転楕円体を表すことになる。

1.3.2.3 2つの解析解と山川の解との比較

ところで、本稿の冒頭でも述べたように、半無限均質弾性体内に球圧力源（中心深さ D 、半径 a_0 とする）が存在する場合の地表面変位の解析解は山川（1955）によって得られており（「山川の解」），上下変位 U_z および水平変位 U_r は次の式で表される。なお、山川の解による U_z および U_r であることを明確にするため、それぞれ $U_{z(YMK)}$, $U_{r(YMK)}$ と表記する。

$$U_{z(YMK)} = \frac{3a_0^3 \Delta P}{4\mu} \frac{D}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \quad \cdots (6)$$

$$U_{r(YMK)} = \frac{3a_0^3 \Delta P}{4\mu} \frac{r}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \quad \cdots (7)$$

なお、 z 軸は、原論文では鉛直下向きを正としているが、ここでは(2)式および(4)式に合わせて鉛直上向きを正として(6)式の符号を変えた。(2)(4)(6)式はいずれも $U_z > 0$ の場合に地表面の隆起を表す。

さて、球は、回転楕円体の短軸 b が長軸 a に等しい場合を考えることもできる。従って、 $b=a$ の時、Davis の解および山科の解は、山川の解に一致しなければならない。

まず、山科の解について見ると、 $b=a$ の場合は(1)式より $f=0$ であるから、(4)(5)式は山川の解に一致することを容易に確かめることができる。

次に、Davis の解について見ると、 $b=a$ の時、(2)(3)式は山川の解の $1/3$ 倍となる。これは解の導出の際の何らかの誤りと考えられるが、以下では Davis の解として(2)(3)式をそのまま用いて議論を進める。

1.3.2.4 今回作成した FE モデルの概要と計算精度

(1) FE モデルの概要

以下、今回作成した FE モデルの概要について述べる。モデルの基本的な設定は坂井・他（2007a）に従った。固体地球表面の曲率は無視し、地表面を平面とする。回転楕円体圧力源の中心深さ D を10km に固定する。回転楕円体の回転軸は z 軸とし、 z 方向半径を a 、 xy 方向半径を b として、扁平率 f を(1)式で定義する。 $a > b$ （縦長の回転楕円体）の場合、 f は正の値 ($0 < f < 1$) を取る。一方、 $a < b$ （横に平たい回転楕円体）の場合にも同じく(1)式で f を定義し、この時、 f は負の値を取る。今回のモデリングでは、まず $a > b$ の場合については、

Table 1.3.2.1 Parameters of FE models that have ellipsoidal pressure source analyzed in this study.

a[km]	b[km]	f = (a-b)/a	a[km]	b[km]	f = (a-b)/a
1	0.9	0.1	0.9	1	-0.1111
1	0.8	0.2	0.8	1	-0.25
1	0.7	0.3	0.7	1	-0.4286
1	0.6	0.4	0.6	1	-0.6667
1	0.5	0.5	0.5	1	-1
1	0.4	0.6	0.4	1	-1.5
1	0.3	0.7	0.3	1	-2.3333
1	0.2	0.8	0.2	1	-4
1	0.1	0.9	0.1	1	-9

a を 1 km に固定し, b を 0.9km から 0.1km まで, 0.1km 刻みで変化させた。この時, f の値は 0.1 から 0.9 まで変化する。一方, $a < b$ の場合については, b を 1 km に固定し, a を 0.9km から 0.1km まで, 0.1km 刻みで変化させた。この時, f の値は -0.1111 から -9 まで変化する (Table 1.3.2.1 参照)。このように, 回転椭円体の長軸を D (= 10km) の 1/10 の 1 km と充分小さく設定することにより, 圧力源の大きさが地表面変位に及ぼす影響 (例えば, 坂井・他, 2007b) を排除した。

この回転椭円体圧力源の周囲に円柱形のモデル領域を考える。円柱モデル領域の半径 R および高さ H を大きくするほどモデル領域中心部での計算精度は高くなるが, その一方, 節点数が必然的に増加し, 計算時間が加速度的に増大する。そこで, 今回は R と H をいずれも D の 15 倍の 150km に設定した。 $f = 0.3$ ($a = 1$ km, $b = 0.7$ km) の場合のモデル中心部 (距離 r が約 30km まで) の外観を Fig. 1.3.2.1-1(a) に, 椭円体圧力源の拡大図を Fig. 1.3.2.1-1(b) に示す。また, $f = -1$ ($a = 0.5$ km, $b = 1$ km) の場合の圧力源の拡大図を Fig. 1.3.2.1-2 に示す。これらのモデルの円柱形モデル領域は方位角方向に 90 度に切断してあるが, 今回扱うような軸対称モデルの場合はこの 2 つの切断面に対称境界条件を設定して FE 解析を行うことにより, 要素数および節点数を 360 度円柱モデルの場合の約 1/4 に減らしつつ, 360 度円柱モデルと全く同じ解析結果を得ることができる。円柱モ

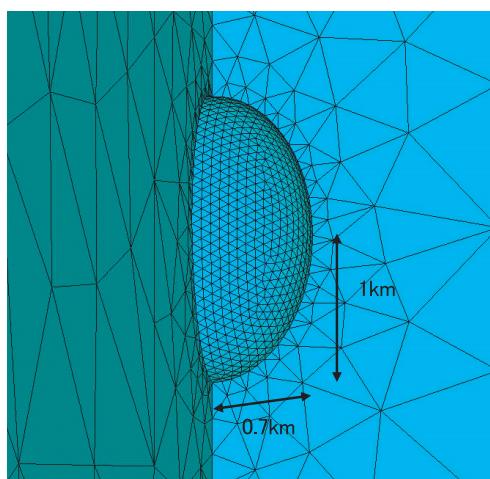
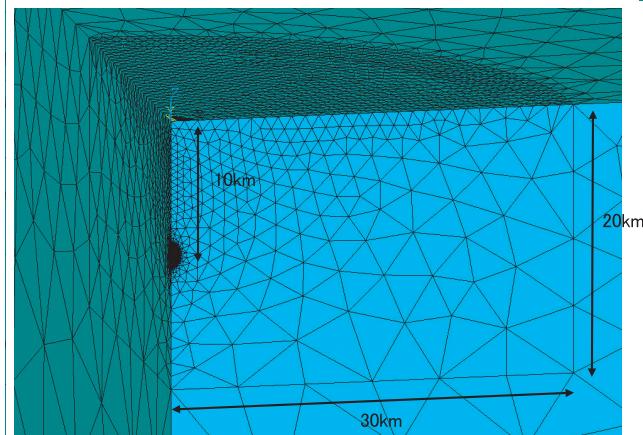


Fig. 1.3.2.1-1 (a) Exterior of the central part of the FE model for $f = 0.3$. (b) Magnification of the ellipsoidal pressure source.

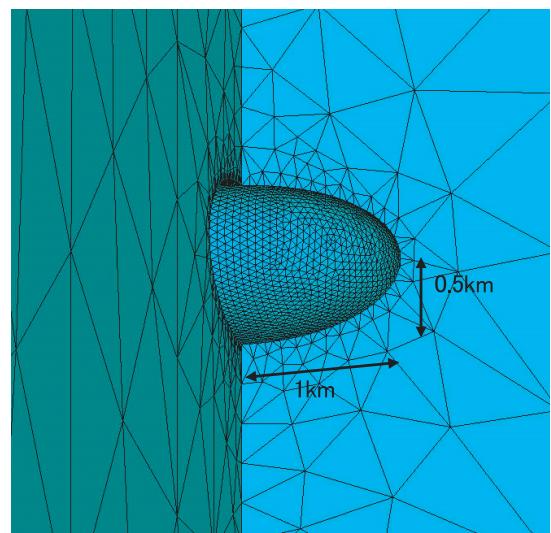


Fig. 1.3.2.1-2 For $f = -1$.

モデル領域の底面および外周面の境界条件は完全固定とした。

メッシングの設定は、回転楕円体圧力源部分のメッシュサイズをそれぞれの回転楕円体の短軸の $1/5$ 程度、距離 $r=30\text{km}$ までの地表面のメッシュサイズを 1km 程度とした。モデルの媒質は均質とし、剛性率 μ の値として上部地殻の標準的な値 40GPa を用いた。また、回転楕円体圧力源の表面に加わる圧力変化 ΔP は正(外向き)とし、その大きさは 1000atm (= $1.01325 \times 10^8\text{Pa}$)とした。

以下では、FE解析結果による上下変位 U_z および水平変位 U_r をそれぞれ $U_{z(FEM)}$, $U_{r(FEM)}$ と表記する。

(2) 計算精度の確認およびFE解析結果の補正

上記の円柱モデル領域($R=H=150\text{km}$)による計算精度を確認するため、坂井・他(2007a)と同様に、茂木-山川モデルをFEモデルで再現して山川の解との比較を行う。

$R=H=150\text{km}$ の円柱モデル領域によって $D=10\text{km}$, $a_0=1\text{km}$ の球圧力源FEモデルを作成し、 $\Delta P=1000\text{atm}$ (= $1.01325 \times 10^8\text{Pa}$)を与えた場合の $U_{z(FEM)}$ と $U_{r(FEM)}$ を、山川の解と併せてFig. 1.3.2.2-1に示す(縦軸は山川の解の U_z の最大値 1.900cm で規格化)。なお、横軸の距離 r は D の3倍の 30km までを表示し、 $U_{z(FEM)}$ と $U_{r(FEM)}$ は中間節点を含めて 0.5km 間隔で示した。また、両者の比($U_{z(FEM)}/U_{z(YMK)}$, $U_{r(FEM)}/U_{r(YMK)}$)をFig. 1.3.2.2-2に示す。今の場合、 $a_0/D=0.1$ (= $1\text{km}/10\text{km}$)と充分小さく、山川の解が充分精度良く成り立っている(山川, 1955)ため、両者の比は即ちFEMの計算精度を表すことになる。そこで、以下、両者の比を「計算精度」と呼ぶことにする。 U_r の計算精度は $r=30\text{km}$ までの範囲で99%以上を実現しており、また、 U_z についても $r=30\text{km}$ までの範囲で91%以上の計算精度を確保している。

このように、今回設定した円柱モデル領域は一定の計算精度を有しているが、本稿ではさらに精度の良い計算結果を得るために、本報告1.2.3節(低速度表層が存在する場合)と同様に、Fig. 1.3.2.2-2に示した計算精度を基にFE解析結果を補正する。具体的には、Fig. 1.3.2.2-2の各節点での計算精度の値で、FEモデルの各節点での $U_{z(FEM)}$ および $U_{r(FEM)}$ を割る。あるいは、計算精度の逆数を補正係数として各節点での $U_{z(FEM)}$ および $U_{r(FEM)}$ に掛けると考えても良い。以下に示すFE解析結果は全てこの計算精度補正操作を施した後の値である。

1.3.2.5 FE解析結果と2つの解析解との比較

まず、 $f=0.2$, 0.3 および 0.5 の場合(縦長の回転楕円体)のFE解析結果を、2つの解析解と併せてFig. 1.3.2.3-1~1.3.2.3-3に示す。Davisの解は他の2者に比べて全般に値が小さい。これには、先述のように、Davisの

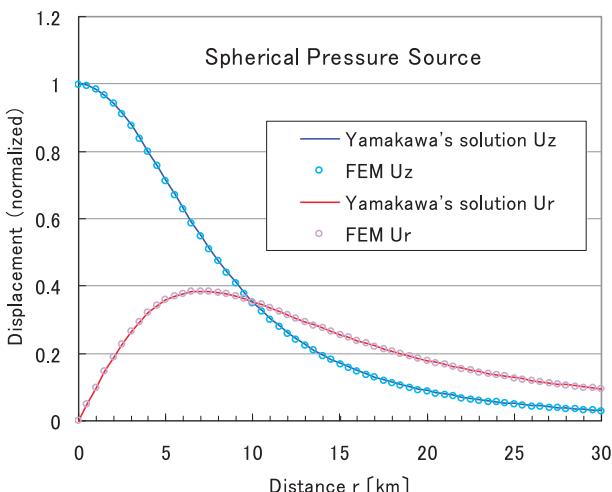


Fig. 1.3.2.2-1 Confirmation of the precision of calculation by the FE model of $R = H = 150\text{ km}$ (R and H are the radius and the height of the FE model region, respectively). Mogi-Yamakawa's model (depth $D = 10\text{ km}$ and radius $a_0 = 1\text{ km}$) was reproduced by FEM.

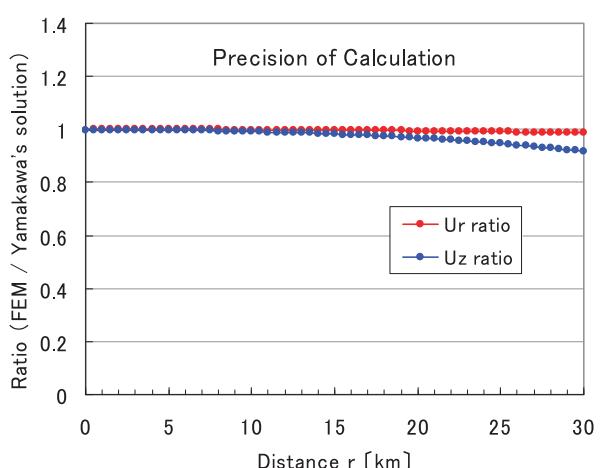
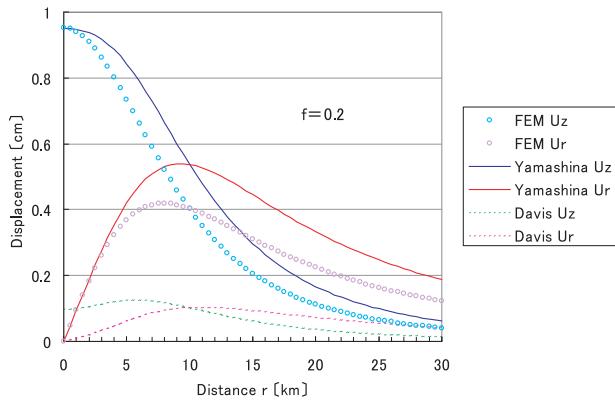
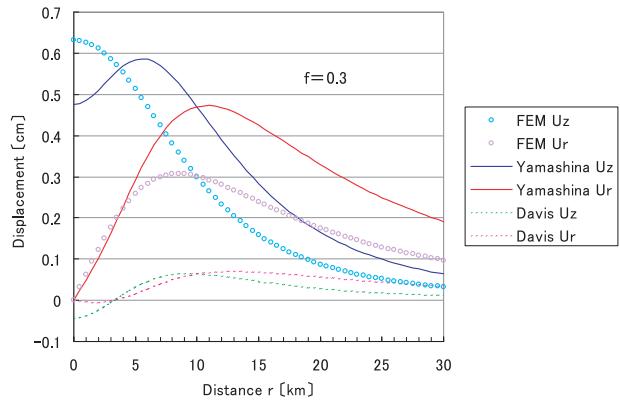
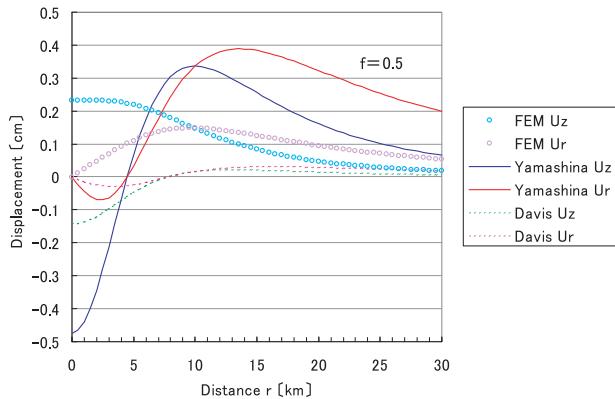
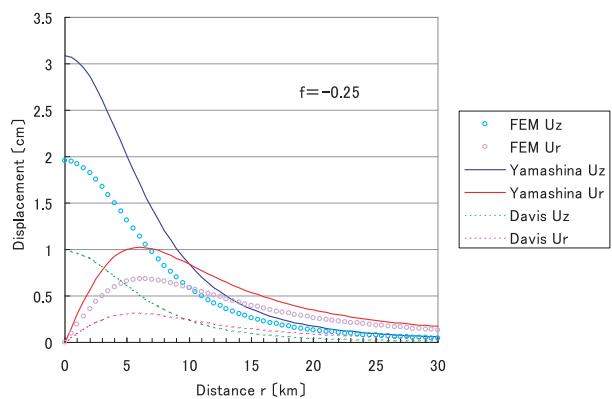


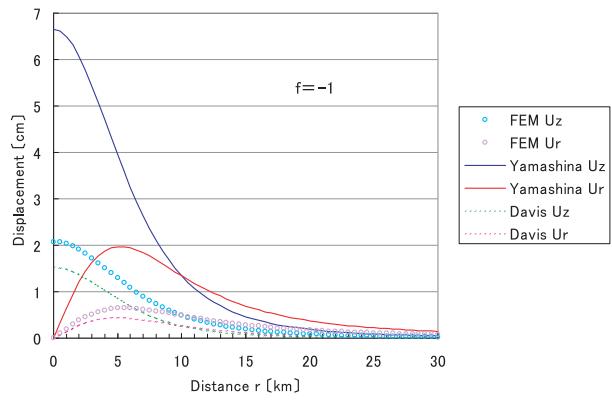
Fig. 1.3.2.2-2 Ratio of the results of FE analysis to Yamakawa's solution. A sufficiently high precision of calculation is realized.

Fig. 1.3.2.3-1 Results of FE analysis for $f = 0.2$.Fig. 1.3.2.3-2 For $f = 0.3$.Fig. 1.3.2.3-3 For $f = 0.5$.Fig. 1.3.2.3-4 For $f = -0.25$.

解の式全体にかかる係数が誤っている（とみられる）ことが大きく関係しているよう。また、 $f = 0.3$ および 0.5 の場合は、近距離地点において U_z 、 U_r 共に値が負となっている。一方、山科の解は、FE解析結果に比べて全般的に大きくなりつつも、Davisの解に比べればFE解析結果に近い変位を示すと言えるが、やはりFE解析結果を良く表しているとは言い難い。特に、 $f = 0.3$ の場合、 $U_{z(FEM)}$ は $r = 0$ （圧力源直上）で最大値を取るが、 $U_{z(YMS)}$ が最大値を取る r は5517mである。また、 U_r が最大値を取る地点についてもFE解析結果との間に大きな違いが見られる。さらに、 $f = 0.5$ の場合は、上述のDavisの解と同様、近距離地点において U_z 、 U_r 共に値が負となっている。このような3者の食い違いは f がさらに大きくなるにつれてますます顕著になっていく。

なお、 f が 0.5 以上になると、 $U_{z(FEM)}$ についても最大値が $r = 0$ （圧力源直上）ではなく少し離れた地点に現れるようになる。Fig. 1.3.2.3-3 ($f = 0.5$) では縦軸の値の取り方の関係上その様子が分かりにくいが、後出のFig. 1.3.2.4-3~4-5でその様子を確認することができる。

次に、 $f = -0.25$ および -1 の場合（横に平たい回転楕円体）のFE解析結果を、2つの解析解と併せてFig. 1.3.2.3-4およびFig. 1.3.2.3-5に示す。上記の $f > 0$ の場合に比べれば、変位曲線の概形は U_z 、 U_r とも互いに類似しているものの、やはり、山科の解>FE解析結果>Davisの解、という大小関係が見られる。

Fig. 1.3.2.3-5 For $f = -1$.

1.3.2.6 回転楕円体圧力源による地表面変位の近似式の導出

前項で見たように、Davis の解も山科の解も FE 解析結果に合致しない。しかしながら、これらの解のパラメータ f に、回転楕円体の形状から決定される本来の値とは異なる適当な値を与え、かつ、式全体に適当な係数を掛けると、FE 解析結果に概ね合致させられる場合があることから、我々は、2つの解析解に現れる各係数を修正すれば、FE 解析結果に合致する経験的な近似式（実験式）を導出できるのではないかと考え、以下のようにして近似式を決定することに成功した。

まず、 K 、 h_1 、および h_2 を係数として近似式を次のようにおく。

$$U_{z(APP)} = K \frac{D}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \left(1 + h_1 f - h_2 f \frac{D^2}{D^2 + r^2} \right) \quad \cdots (8)$$

$$U_{r(APP)} = K \frac{r}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \left(1 + h_1 f - h_2 f \frac{D^2}{D^2 + r^2} \right) \quad \cdots (9)$$

これらの式中の K 、 h_1 および h_2 を、まず $f = 0.2$ の場合の FE 解析結果（Fig. 1.3.2.3-1 参照）に合致するよう決定していく。

まず、式全体に掛かる係数 K について考察する。Davis の解の係数 $ab^2 \Delta P / 4\mu$ は、 $b=a$ （圧力源形状が球）の場合に山川の解に一致せずその $1/3$ 倍になるが、これは先述のように解の導出の際の何らかの誤りと考えられる。一方、山科の解の係数 $3a^3 \Delta P / 4\mu$ は、球圧力源に対する山川の解の係数と全く同じであり、楕円体の形状に関連する重要なパラメータ b が入っていない。Fig. 1.3.2.3-1～1.3.2.3-3 で山科の解が FE 解析結果に比べて全般的に大きくなるのはこのことが原因であると推察される。これらのことから、 K を、Davis の解に 3 を掛けた形の

$$K = \frac{3ab^2 \Delta P}{4\mu} \quad \cdots (10)$$

と仮定した。この係数は $b=a$ の場合に山川の解の係数に一致する。

一方、 h_1 および h_2 については、2つの解析解の値を参考にしながら試行錯誤的に値を様々に変化させた。その結果、 $h_1 = 1/2$ 、 $h_2 = 8/5$ とした場合に、 U_z 、 U_r とも FE 解析結果に良く一致することが判明した（Fig. 1.3.2.4-1）。なお、ここで決定された h_1 の値は山科の解と同じ値であり、 h_2 の値は Davis の解の $1/3$ である。このようにして、 $f = 0.2$ の回転楕円体圧力源による地表面変位を表す近似式（上下変位、水平変位をそれぞれ $U_{z(APP)}$ および $U_{r(APP)}$ とする）は以下のように決定された。

$$U_{z(APP)} = \frac{3ab^2 \Delta P}{4\mu} \frac{D}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{1}{2}f - \frac{8}{5}f \frac{D^2}{D^2 + r^2} \right) \quad \cdots (11)$$

$$U_{r(APP)} = \frac{3ab^2 \Delta P}{4\mu} \frac{r}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{1}{2}f - \frac{8}{5}f \frac{D^2}{D^2 + r^2} \right) \quad \cdots (12)$$

(11)(12)式は $b=a$ （従って $f=0$ ）の場合に山川の解に一致することを容易に確かめることができる。

他方、この近似式は、 f が 0.2 以外の場合についても適用できることが分かった。 $f = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ 、および、 $-0.25, -1, -2.3333$ の 7 例について、(11)(12)式と FE 解析結果の比較を Fig. 1.3.2.4-2～1.3.2.4-8 に示す。 f の値が 0 に近い場合にはこの近似式は FE 解析結果に良く一致し、また、 f の値が 0 から大きく離れても（つまり、回転楕円体の形状が z 軸方向に非常に細長く、あるいは水平方向に非常に平たくなっても）FE

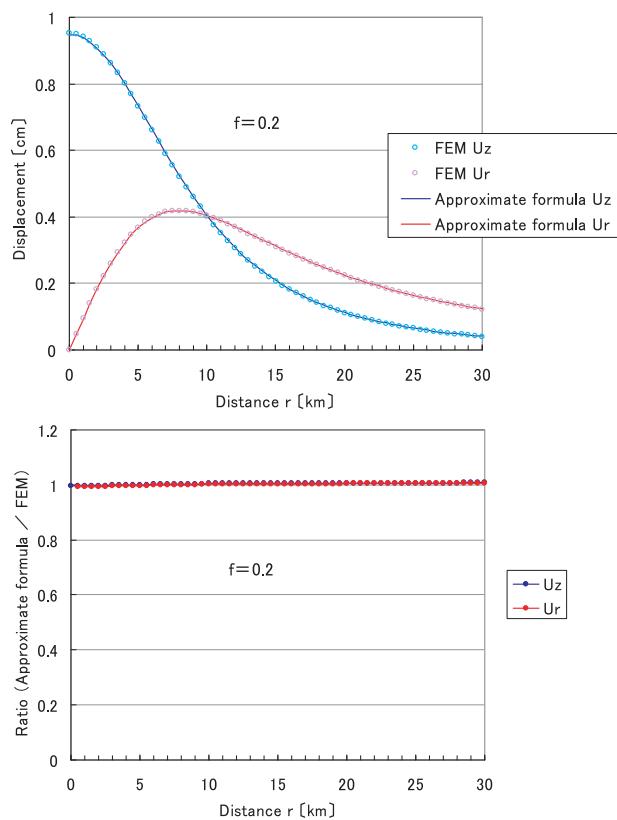


Fig. 1.3.2.4-1 Comparison of our approximate formula (experimental formula) and results of FE analysis for $f = 0.2$. The approximate formula agrees with the results of FE analysis in both U_z and U_r .

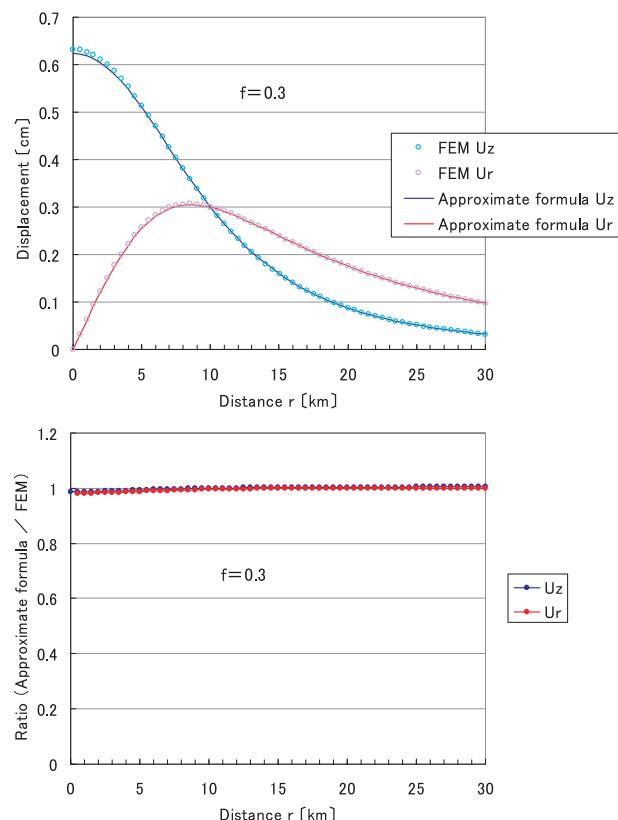


Fig. 1.3.2.4-2 For $f = 0.3$.

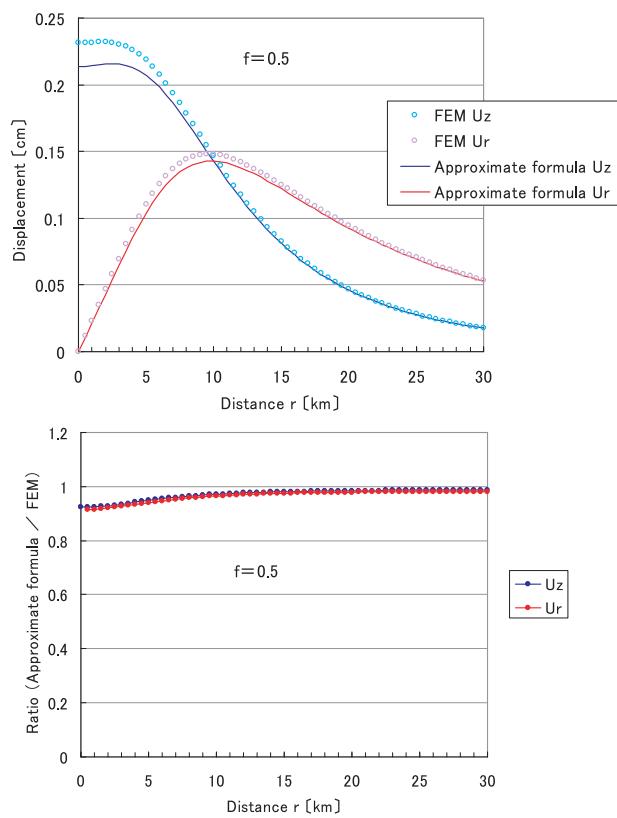


Fig. 1.3.2.4-3 For $f = 0.5$.

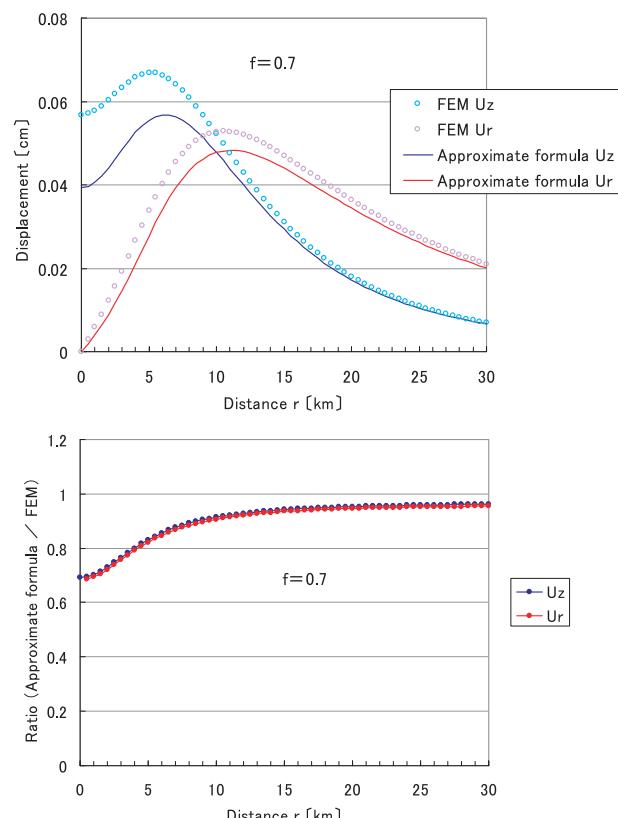
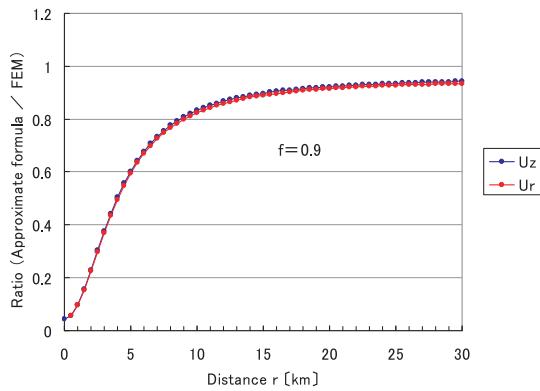
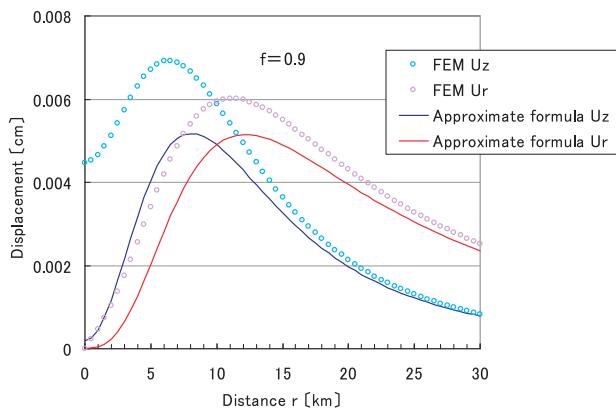
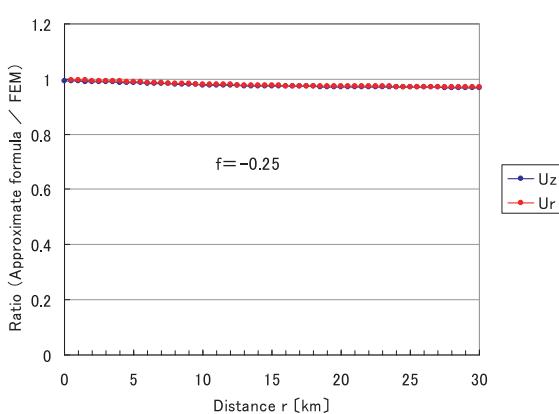
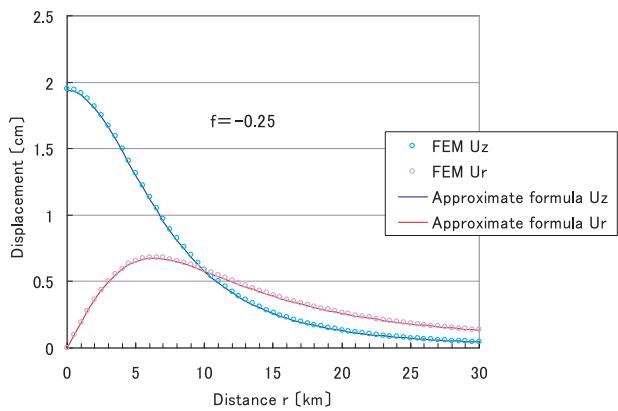
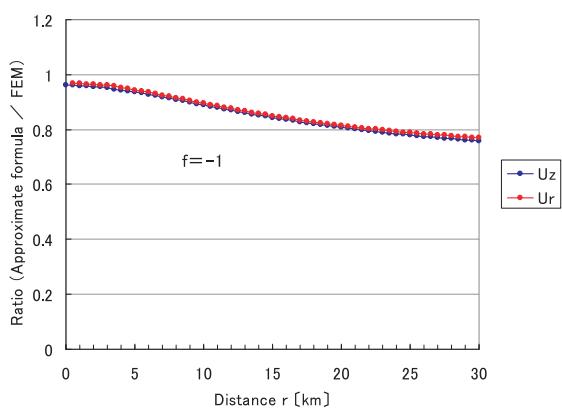
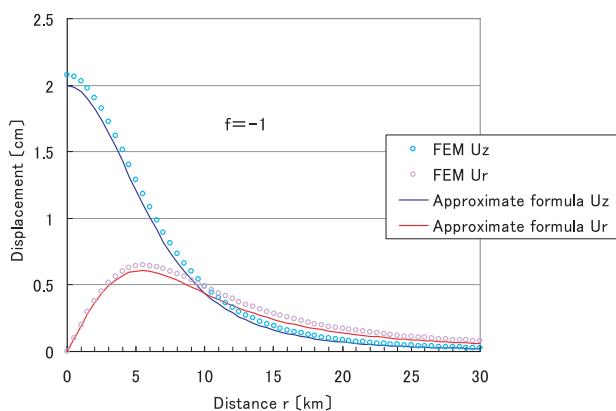
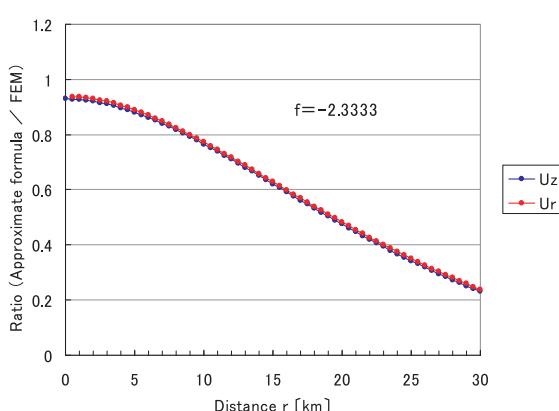
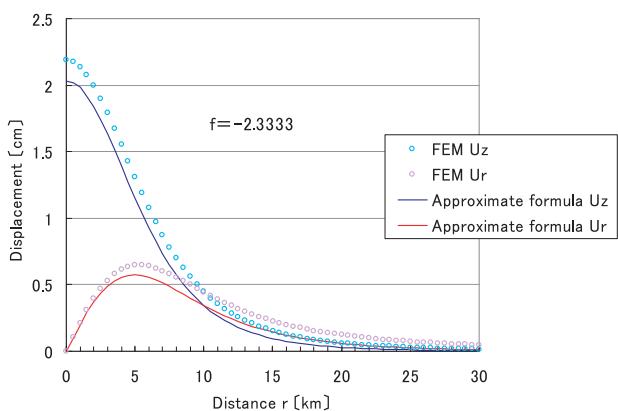


Fig. 1.3.2.4-4 For $f = 0.7$.

Fig. 1.3.2.4-5 For $f = 0.9$.Fig. 1.3.2.4-6 For $f = -0.25$.Fig. 1.3.2.4-7 For $f = -1$.Fig. 1.3.2.4-8 For $f = -2.3333$.

解析結果をある程度良く再現していることが分かる。 f の値が 0 から離れるほど FE 解析結果からの乖離が目立つようになるのは、山川の解において a_0/D が大きくなった場合（坂井・他, 2007b）と同様の、解のある種の限界であろう。山川の解の場合と同様、本来は存在するはずの高次項を今回の近似式では省略していることがその要因と推察される。

さらに定量的な検討を加えた結果、この近似式は、 f がおよそ -0.5 から +0.4 までの広い範囲で FE 解析結果と 3 % 以内の精度で一致することが分かった。

最後に、Davis の解および山科の解が FE 解析結果に合致しない理由について簡単に考察する。まず、 K については、恐らく Davis の解の導出の際に単純なミスがあったものと推察される。また、 f については、本稿 1.3.2.2 項で引用した「回転楕円体の扁平率を f とすると、 z 軸方向に $(1-f) \Delta P$ 、 x 軸および y 軸方向に ΔP というダブルフォースが働く場合と等価である」という考え方には問題があるのかもしれない。回転楕円体を真上から見た場合と真横から見た場合の断面積の比は確かに $1-f$ となり、Davis らはそれに基づいて解を導出したものと思われるが、楕円体圧力源が周囲に及ぼす力はこのような単純な定式化では表現できない（楕円体の形状と力のかかり具合が 1 対 1 に対応していない）ことも予想され、今後の検討が望まれる。ただし、楕円については各種の数学的扱いが困難であることが多い、検討には数値的な手法も必要となるかもしれない。

1.3.2.7 まとめと今後の課題

擬似回転楕円体圧力源による地表面変位の解析解として、Davis *et al.* (1974) および山科 (1986) による解がこれまで提出されている。FEM を用いて回転楕円体圧力源モデルを作成し、FE 解析結果をこれら 2 つの解析解と比較したところ、いずれも FE 解析結果と大きく食い違うことが判明した。そこで今回、2 つの解析解の係数を修正することにより、FE 解析結果に良く適合する近似式（実験式）を導出した。この近似式の導出により、回転楕円体圧力源による変位を定量的に扱うことができるようになった。今回導出したこの近似式を解析的に導くことが今後の課題である。

なお、今回導出した近似式は、パラメータを調整することにより、円柱圧力源（本報告 1.3.1 節）や角柱圧力源の FE 解析結果もかなり良く再現することができるが、それについては別の機会に紹介することにしたい。

(坂井孝行)

参考文献

- 茂木清夫, 1957 : 桜島の噴火と周辺の地殻変動との関係, 火山, 1, 9-18.
- 坂井孝行・山本哲也・福井敬一・高木朗充・藤原健治・中禮正明, 2007a : 有限要素法による火山性地殻変動の計算精度の確立 – 茂木-山川モデルの再現 –, 気象研究所研究報告, 58, 1-15.
- 坂井孝行・山本哲也・福井敬一・高木朗充・藤原健治・中禮正明, 2007b : 深さに比して相対的に大きな半径を有する球圧力源による地表面変位 – 有限要素法による計算 –, 気象研究所研究報告, 58, 17-30.
- 山川宜男, 1955 : 内部力源による半無限弾性体の変形について, 地震, 8, 84-98.
- 山科健一郎, 1986 : 応力場と火山噴火, 火山, 30, S101-S119.
- Davis, P. M., Hastie, L. M. and Stacey, F. D., 1974 : Stresses within an active volcano - with particular reference to Kilauea. *Tectonophysics*, 22, 355-362.