

1.2.3 低速度表層が存在する場合の地殻変動

山川 (1955) の解 (以下「山川の解」) は、半無限均質弾性体中に充分小さな球圧力源が存在する場合の地表面変位の解析解である。一方、媒質が均質ではなく低速度表層が存在する場合、地表面変位は山川の解とは異なるものになることが、塚越・小高 (1998) などによって既に明らかにされている。彼らは FEM を用いて低速度表層が存在する場合の地殻変動を計算し、地表面変位が山川の解より大きくなるという結果を得ている。

しかしながら、本特別研究で得られた我々の研究成果からすると、彼らの FE モデルのモデル領域はやや小さいため十分な計算精度が確保されているとは言い難く、また、球圧力源半径の設定にも若干の不備が見られる。

そこで、本節では、まず塚越・小高 (1998) の FE 解析結果を概観し、次に、同じモデルについて計算精度に十分に留意しつつ再解析を行った我々の結果を示す。さらに、今回導出した、低速度表層が存在する場合の地表面変位を表す解析解 (本節末尾の Appendix 参照) との比較も行う。

1.2.3.1 塚越・小高 (1998) の解析結果とその問題点

塚越・小高 (1998) はその補遺において、半無限均質媒質 (P 波速度 $V_P=5.29\text{km/s}$, S 波速度 $V_S=3.06\text{km/s}$, 密度 $\rho=3.0\text{g/cm}^3$) の上に、厚さ $H=1\text{km}$ の低速度表層 ($V_P=2.80\text{km/s}$, $V_S=1.45\text{km/s}$, $\rho=2.2\text{g/cm}^3$) がある場合の FE 解析結果を示している。ただし、球圧力源は中心深さ $D=10\text{km}$, 半径 $a=3\text{km}$ (従って $a/D=0.3$) とし、そこに与えられる圧力変化 ΔP は 221.111MPa ($=5970/3^3\text{MPa}$) としている。また、モデル領域は半径 40km , 高さ (深さ) 50km の $1/4$ 円柱に設定している。境界条件は、円柱底面および切り口において、各面に垂直な方向の変位をそれぞれ 0 とし、地表面および円柱側面 (水平距離 $r=40\text{km}$) を自由表面としている。

このモデルの彼らの FE 解析結果を Fig. 1.2.3.1 に示す。図中の実線が低速度表層のない場合の山川の解 (下層の弾性定数を使用) であり、 \triangle 印が低速度表層モデルの解析結果である (なお、 \circ 印と \star 印は低速度表層がない FE モデルの解析結果)。低速度表層モデルでは、上下変位 U_z , 水平変位 U_r とも山川の解より有意に大きくなっている。それは特に U_r で顕著であり、最大値が山川の解の約 1.3 倍になっている (U_z は約 1.1 倍)。このことから、彼らは、「GPS 等による地殻変動観測のデータの解析の際には、この表層の効果を考慮に入れることは必須の条件となるであろう。」との重要な指摘をしている。

しかしながら、本特別研究で得られた我々の研究成果からすると、彼らの解析結果には計算精度に関して若干の不備が指摘される。それは、

- ・モデル領域が半径 $4D$, 高さ $5D$ とやや小さいこと
- ・球圧力源の a/D が 0.3 とやや大きいこと

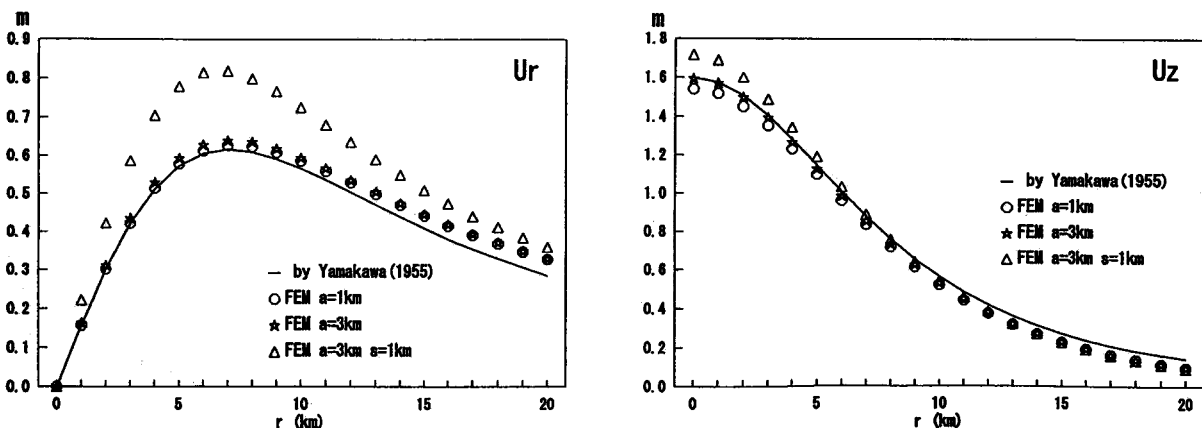


Fig. 1.2.3.1 Results of FE analysis of the model which has a low-velocity surface layer by Tsukakoshi and Odaka (1998). $D=10\text{ km}$, $a=3\text{ km}$, and $H=1\text{ km}$.

の2点である。

モデル領域については、十分な計算精度を実現するには、半径、高さとも $15D\sim 20D$ 程度のモデル領域を設定し、その中心部(距離 $r\sim 3D$ 程度まで)の計算結果を使用することが望ましい(坂井・他, 2007a / 本報告1.1.1節)。ただし、彼らのモデル領域は、当時の計算機の性能に大きく制約されたはずであることも記しておきたい。

一方、球圧力源については、 a/D が0.3とやや大きいことが地表面変位に影響を及ぼしている。 a/D が0.3の場合、球圧力源の大きさの影響は最大で約3%と、量的に厳密な議論をする上では無視できない量となる(坂井・他, 2007b / 本報告1.3.3節)。従って、FE解析結果と山川の解との違いが低速度表層の効果によるものか、それとも a/D が大きいことによる影響かを分離できなくなってしまう。

1.2.3.2 再解析結果

以上に示した問題点を解決するため、塚越・小高(1998)のFEモデルに対して以下の2点の修正を加え、ANSYS Ver. 7.0を用いて再解析を行った。

- i) 円柱モデル領域の半径および高さを $15D (=150\text{km})$ とする
- ii) 球圧力源の a/D を0.1とする($a=1\text{km}$ とする)

なお、モデル領域の境界条件については、坂井・他(2007a)に従い、底面および側面を完全固定とし、円柱の切り口には対称境界条件を課した。

以下、この修正FEモデルを「モデル①」とする。モデル①の中心部の外観をFig. 1.2.3.2に示す。モデル全体の要素数は38059個、節点数は62213個である。

我々の再解析結果を示す前に、今回用いたモデル領域の計算精度をチェックする。FEMの計算精度をチェックするためには、何らかの解析解が存在する状況をFEモデルで再現し、その計算結果を解析解と比較すれば良い。そこで、モデル領域および球圧力源を上記i) ii)のように設定した均質モデルを作成した。低速度表層を持たないこのモデルは茂木-山川モデルをFEMで再現したものである。このモデルのFE解析結果を、山川の解と併せてFig. 1.2.3.3(a)に示す(縦軸は山川の解の U_z の最大値で規格化)。また、両者の比を取ったものをFig. 1.2.3.3(b)に示す。なお、 $r=0\text{km}$ (球圧力源直上)での U_r はFE解析結果も山川の解も0となるため比は取っていない(以下同様)。今、 $a/D=0.1$ と、 a は D に対して充分小さいため、山川の解は充分精度良く成立している(山川, 1955)。従って、Fig. 1.2.3.3(b)に示した比の値は、このFEモデル領域の計算精度を表すことになる(坂井・他, 2007a)。距離 $r=30\text{km}$ までの全範囲において、 U_r については約1%以内、 U_z についても約8%以内の高い計算精度が確保されている様子が分かる。特にモデル中心部は計算精度が高く、例えば $r=10\text{km}$ までの範囲内では、 U_r については約0.1%以内、 U_z についても約0.8%以内の高い計算精度が確保されている

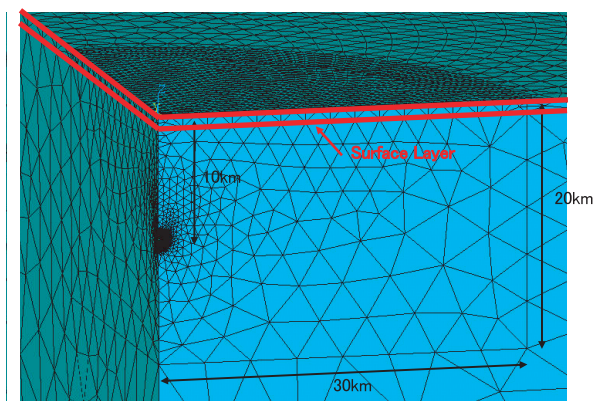


Fig. 1.2.3.2 Exterior of the central part of Model ① (modification of Tsukakoshi and Odaka's model).

さらにここでは、より高精度の計算結果を得るため、FE解析結果の計算精度を補正する。具体的には、各FEモデルの解析によって得られた各節点での変位量を、Fig. 1.2.3.3(b)に示した各節点での計算精度の値で割る。FEMではどのようなモデル領域を設定しても、必ずモデル端(モデル底面および側面)の影響を受け、山川の解を完全に再現することはできない(坂井・他, 2007a)。Fig. 1.2.3.3(b)の計算精度の値に見られる1からのずれも、半径および高さ150kmの円柱モデル領域の底面および側面の影響によるものである。従って、この150km円柱モデル領域を用いて解析を行ったあるFEモデルの計算結果をFig. 1.2.3.3(b)の計算精度の値で割れ

ば、モデル端の影響を除去でき、計算精度を補正できることになる。以下に示すグラフは全てこの計算精度補正操作を行ったものである。

なお、ANSYSでは弾性定数としてポアソン比 σ とヤング率 E を与えなければならないが、それらは先述の V_p , V_s , ρ の値を用いて以下の式から計算した。 λ および μ はラメの定数 (μ は剛性率) である。

$$\mu = \rho V_s^2, \quad \lambda = \rho(V_p^2 - 2V_s^2)$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = 2\mu(1 + \sigma)$$

これらの式によって算出される各弾性定数は、下層については $\mu = 2.809 \times 10^{10}$ Pa, $\lambda = 2.777 \times 10^{10}$ Pa, $\sigma = 0.2486$, $E = 7.014 \times 10^{10}$ Paであり、低速度表層については $\mu = 4.626 \times 10^9$ Pa, $\lambda = 7.997 \times 10^9$ Pa, $\sigma = 0.3168$, $E = 1.218 \times 10^{10}$ Paである。

また、 ΔP については、 a を3 kmから1 kmに小さくしたことにより、同じ ΔP を与えると変位量が $1/3^3$ 倍になってしまうため、ここでは同じ変位量が得られるよう5970MPaを与えた。

以上のように適切なモデル設定をして再解析を行い、さらに計算精度を補正して得られた高精度の計算結果を、山川の解 (下層の λ と μ の値を使用) と併せて Fig. 1. 2. 3. 4(a) に示す。また、FE解析結果と山川の解との比を取ったグラフを Fig. 1. 2. 3. 4(b) に示す。なお、今の場合、 $\lambda \neq \mu$ であるため、山川の解は次の式で表される (例えば、山科, 1986)。

$$U_z = \frac{(\lambda + 2\mu)a^3 \Delta P}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{D}{(D^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$U_r = \frac{(\lambda + 2\mu)a^3 \Delta P}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{r}{(D^2 + r^2)^{3/2}}$$

Fig. 1. 2. 3. 4(a) (b) より、FE解析結果は、距離 r が小さい地点ほど山川の解に比して大きくなるが、 r が増加するにつれて U_z , U_r とも次第に山川の解に近付いていく様子が分かる (Fig. 1. 2. 3. 1に示した塚越・小高 (1998) の結果ではこの様子がうまく表現されていない)。つまり、球圧力源に近い地点ほど低速度表層の影響を大きく受けて変位が大きくなるが、球圧力源から離れるにつれて低速度表層の影響は次第に薄れていく。このことは低速度表層が存在する場合の地表面変位の重要な性質の1つである。また、Fig. 1. 2. 3. 4(a) (b) より、 U_z は低速度表層の影響を大きく受ける距離が U_r に比べて狭い範囲に限られることも分かる。

ところで、半無限均質弾性体中に a/D が大きな球圧力源が存在する場合も、球圧力源に近い地点ほど a/D の大きさの影響を強く受け、やはり r が小さい地点ほど変位が大きくなる (坂井・他, 2007b / 本報告1. 3. 3節)。従って、Fig. 1. 2. 3. 1に示した塚越・小高 (1998) の結果では、計算精度の影響を差し引いたとしても、これら2つの影響が重なり合っていて両者を分離できないことになる。

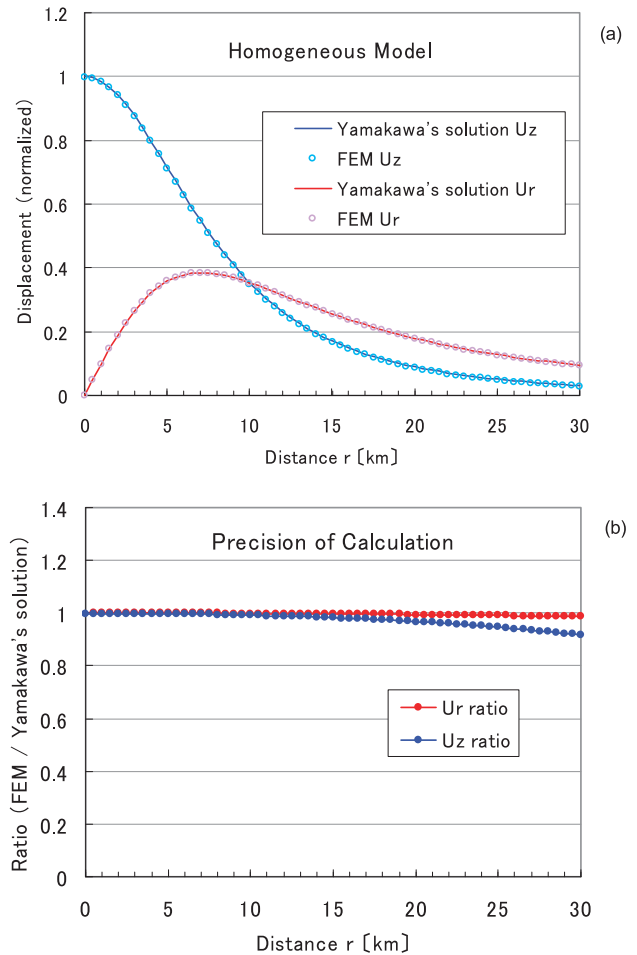


Fig. 1.2.3.3 (a) Comparison of the results of FE analysis of the homogeneous model and Yamakawa's solution. (b) Ratio of the results of FE analysis to Yamakawa's solution.

なお、Fig. 1. 2. 3. 4(b) より、 U_z の比は $r=15\text{km}$ より遠方では1より小さくなっていることが分かる。つまり、 U_z は遠方では山川の解より小さくなっている。一方、本節の Appendix に示した解析解からもこれと同様の結果が得られることから、これは低速度表層が存在する場合の地表面変位の本来の性質と考えられる。後出の Fig. 1. 2. 3. 5(b) および Fig. 1. 2. 3. 6(a) (b) にも同様の性質が見られる。

1. 2. 3. 3 表層の速度と厚さを変化させた場合

塚越・小高 (1998) は、上記のような低速度表層の効果は表層の速度が遅いほど、また厚さが厚いほど顕著になると指摘している。そこで、そのことを確認するため、モデル①のパラメータを変更して次の2つのFEモデルを作成した。

モデル②：低速度表層の速度を V_p , V_s ともモデル①の $1/2$ にしたモデル

(この時の表層の弾性定数は、 $\mu = 8.410 \times 10^8 \text{Pa}$, $\lambda = 1.454 \times 10^9 \text{Pa}$, $\sigma = 0.3168$, $E = 2.214 \times 10^9 \text{Pa}$)

モデル③：低速度表層の厚さ H をモデル①の2倍の 2km にしたモデル

(表層の弾性定数はモデル①と同じ)

これら2モデルのFE解析結果を、モデル①と併せて Fig. 1. 2. 3. 5(a) に示す。また、山川の解との比を Fig. 1. 2. 3. 5(b) に示す。モデル②および③の変位は確かにモデル①より大きくなっており、低速度表層の効果は表層の速度が遅いほど、また厚さ H が大きいほど顕著になることが分かる。

さらに、低速度表層の速度と厚さ H の影響について、より定量的に見るため、 H を 1km , 2km および 3km に変化させた上で、表層のヤング率 (以下 E_s とする) を下層のヤング率 (以下 E_B , $1 \times 10^{11} \text{Pa}$ とする) の 0.5 倍から 0.1 倍まで 0.1 刻みで変化させ、計15モデル (モデル④~⑱) を作成した (Table 1. 2. 3. 1参照)。以下、表層と下層のヤング率の比 E_s/E_B を β とする。ポアソン比 σ については表層、下層とも 0.25 とした。球圧力源についてはモデル①~③と同様に $D=10\text{km}$, $a=1\text{km}$ とし、 ΔP として $1000\text{atm} (= 1.01325 \times 10^8 \text{Pa})$ を与えた。モデル領域や境界条件についてはモデル①~③と同じ設定とした。

ここで、ヤング率 E と速度との関係についてまとめておく。今、 $\sigma = 0.25$ であるから、

$$E = 2\mu(1 + \sigma) = 2.5\mu$$

という簡単な比例関係が成り立つ。また、 $\sigma = 0.25$ より $\lambda = \mu$ であるから、

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{3\mu}{\rho}}, \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

となる。従って、 V_p および V_s の値を具体的に決定するには、ANSYS での地殻変動計算に必要な E および σ の2パラメータの他に ρ の値も必要となるが、仮に表層と下層の ρ が等しいとすると、表層と下層の速度比は、 V_p 比、 V_s 比とも $(\mu_s/\mu_B)^{1/2} = (E_s/E_B)^{1/2} = \beta^{1/2}$ で表されることになる (ただし、上層の μ を μ_s 、下層の μ を μ_B とした)。実際の地殻中においても、 ρ の値は深さによって μ の値ほど大きくは変化しないため、このことが近似的に成り立つと考えて良い。

さて、上記15モデルの解析結果を以下にまとめる。まず、結果を概観するために、

- ・ $H = 2\text{km}$ として β を 0.5 から 0.1 まで変化させた場合 (モデル⑨~⑬)
- ・ $\beta = 0.3$ として H を 1km から 3km まで変化させた場合 (モデル⑥, ⑪, ⑱)

のFE解析結果と山川の解との比を Fig. 1. 2. 3. 6(a) (b) に示す。低速度表層の効果は β が小さいほど、また H

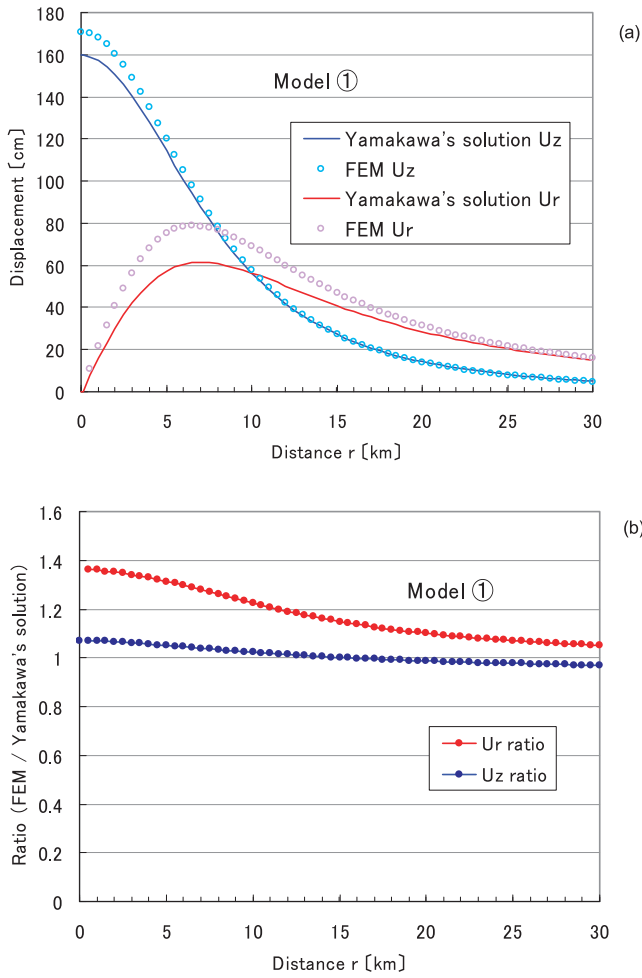


Fig. 1.2.3.4 (a) Results of FE analysis of Model ① (our modification of Tsukakoshi and Odaka's model). The precision of the calculation is corrected. (b) Ratio of the results of FE analysis to Yamakawa's solution.

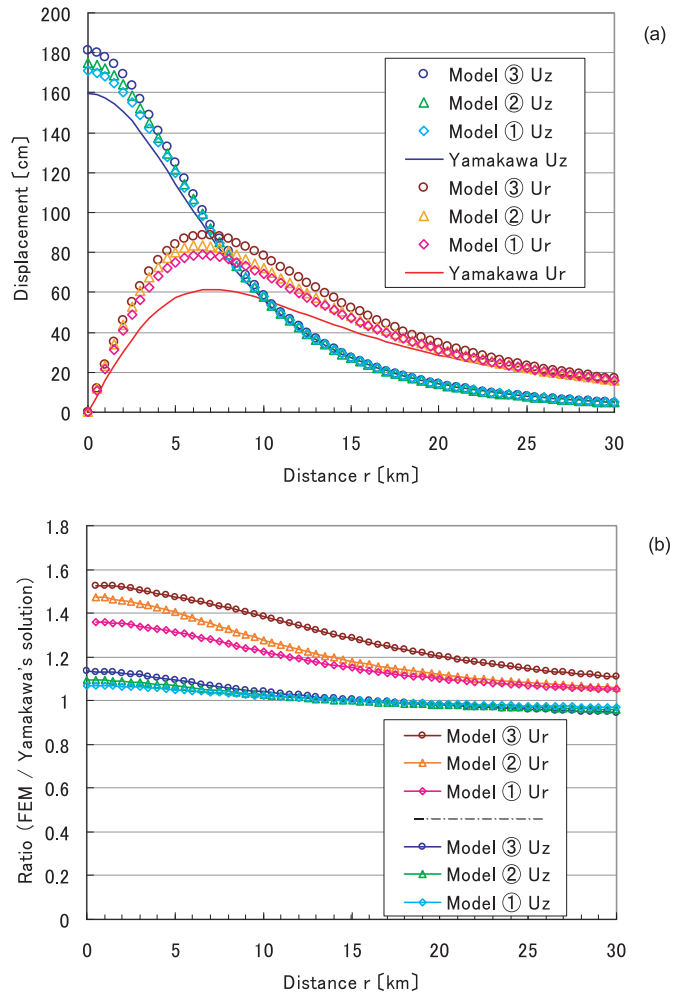


Fig. 1.2.3.5 (a) Results of FE analysis of Models ② ③. (b) Ratio of the results of FE analysis to Yamakawa's solution.

Table 1.2.3.1 H and Young's modulus of the surface layer of 15 FE models. The parameters are systematically changed. A summary of the results of FE analysis is also indicated.

Model	H [km]	E_S / E_B	U_{zMAX}	U_{rMAX}	ϕ	r_{MAX} [m]	r_i [m]
④	1	0.5	1.053	1.156	2.367	6797	8988
⑤	1	0.4	1.066	1.195	2.319	6726	8768
⑥	1	0.3	1.081	1.237	2.270	6649	8539
⑦	1	0.2	1.097	1.284	2.220	6564	8299
⑧	1	0.1	1.115	1.335	2.169	6468	8046
⑨	2	0.5	1.095	1.235	2.303	6811	8540
⑩	2	0.4	1.121	1.301	2.239	6739	8222
⑪	2	0.3	1.151	1.376	2.173	6657	7888
⑫	2	0.2	1.186	1.463	2.106	6564	7534
⑬	2	0.1	1.227	1.566	2.037	6454	7160
⑭	3	0.5	1.133	1.282	2.297	6799	8356
⑮	3	0.4	1.172	1.365	2.232	6734	7999
⑯	3	0.3	1.218	1.462	2.164	6659	7630
⑰	3	0.2	1.272	1.578	2.095	6571	7248
⑱	3	0.1	1.339	1.720	2.023	6465	6851

($E_B=1 \times 10^{11}$ Pa)

が大きいほど確かに顕著になっており、山川の解よりも変位が大きくなっている。また、その効果は特に U_r において顕著であることが分かる。半無限均質弾性体中に球圧力源が存在する場合は、 a/D の大小にかかわらず変位ベクトルの延長線上に球圧力源中心が存在する（坂井・他, 2007b）が、低速度表層が存在する場合の変位ベクトルの延長線は、上記の結果より、実際の球圧力源中心よりも浅い所を指し示すことになる。

次に、変位曲線を特徴付ける量として、

- ・ U_{zMAX} (U_z の最大値)
- ・ U_{rMAX} (U_r の最大値)
- ・ 両者の比 $\phi = U_{zMAX}/U_{rMAX}$
- ・ U_r が最大となる地点 r_{MAX}
- ・ U_z と U_r との交点 r_i

の5つの量に注目する。なお、ここでは、ANSYSの補間ツールを使用して地表面変位を1m間隔で算出し、それに先述と同様の計算精度補正操作を行った結果から上記の5つの量を決定した。 r_i については、両者の差の絶対値が最も小さくなる地点を交点と見なした。

各モデルの U_{zMAX} について、山川の解（低速度表層がない場合）の U_{zMAX} (1.900cm) との比を取った結果を Fig. 1.2.3.7(a) に示す。 β が小さいほど（つまり表層と下層との速度コントラストが大きいほど）、また、 H が大きいほど（つまり低速度表層の厚さが厚いほど）、山川の解との比が大きくなっている。

次に、 U_{rMAX} について、山川の解の U_r (0.731cm) との比を取った結果を Fig. 1.2.3.7(b) に示す。全般的な傾向は上述の U_{zMAX} の場合と同様であるが、低速度表層の影響は U_{zMAX} の場合より顕著であり、山川の解との比が U_{zMAX} の場合より大きくなっている。

次に、 U_{zMAX} と U_{rMAX} との比 ϕ を Fig. 1.2.3.7(c) に示す。上述のように、 U_{zMAX} より U_{rMAX} の方が山川の解に比べて変位量が大きくなることを反映し、 β が小さいほど、また、 H が大きいほど、 ϕ は山川の解の場合(2.598)より小さくなる。ただし、 H が2kmから3kmに増加しても ϕ はほとんど変化しない。

U_r が最大となる地点 r_{MAX} を Fig. 1.2.3.7(d) に示す。 β が小さいほど r_{MAX} は小さくなる（つまり U_r は球圧力源直上により近い地点で最大値を取るようになる）が、 H にほとんど関係ないのは興味深いところである。

U_z と U_r との交点 r_i を Fig. 1.2.3.7(e) に示す。これも ϕ と同様に、 U_{zMAX} より U_{rMAX} の方が山川の解に比べて変位量が大きくなることを反映し、 β が小さいほど、また、 H が大きいほど、山川の解の場合(10km)より球圧力源直上に近い地点に現れるようになる。

以上をまとめると、上記の5つの量は、基本的には β ($=E_S/E_B$) が小さいほど（つまり表層と下層との速度コントラストが大きいほど）、また表層の厚さ H が大きいほど、山川の解からの乖離が大きくなると言える。ただし、 $\phi = U_{zMAX}/U_{rMAX}$ については H がある程度以上になるとほとんど変化しなくなり、また、 U_r が最大となる地点 r_{MAX} は H の影響をほとんど受けない。従って、 H の大きさよりも速度コントラストの大きさの方が、より広範な影響を地表面変位に与えると言える。

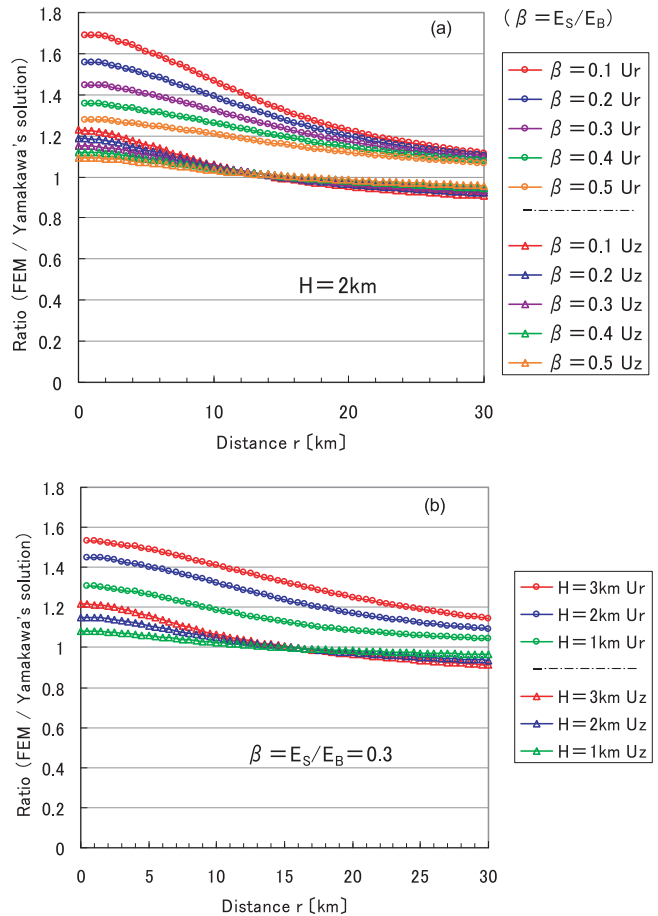


Fig. 1.2.3.6 (a) Results of FE analysis of Models ⑨~⑬ ($H = 2\text{ km}$, $\beta = 0.5\sim 0.1$). (b) Results of FE analysis of Models ⑥, ⑪, and ⑯ ($\beta = 0.3$, $H = 1\sim 3\text{ km}$).

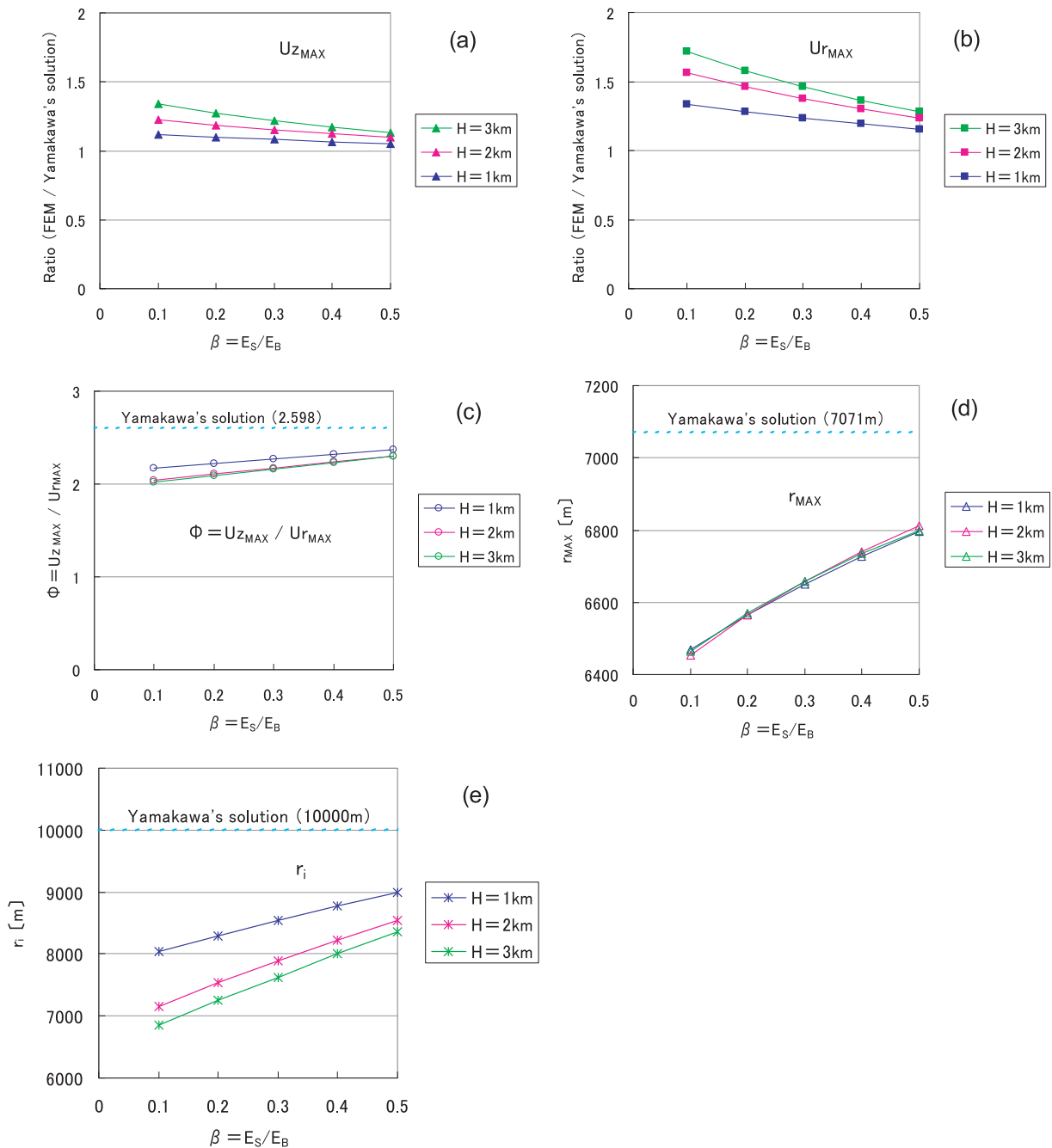


Fig. 1.2.3.7 (a) Comparison of U_{zMAX} of each FE model. (b) Comparison of U_{rMAX} of each FE model. (c) Comparison of ϕ (ratio of U_{zMAX} to U_{rMAX}) of each FE model. (d) Comparison of r_{MAX} (the distance where U_r of the FE models reaches its maximum) of each FE model. (e) Comparison of r_i (intersection of U_z and U_r) of each FE model.

以上の結果を Table 1.2.3.1 にまとめた。Table 1.2.3.1 に示した値から、 H と速度コントラストが異なっていても変位が互いに良く類似しているモデルを見出すことができる。例えば、Fig. 1.2.3.8 に重ねて示したように、モデル⑧、⑩、および⑭の変位は、完全には一致しないものの、互いに非常に良く類似している。従って、 H と速度コントラストは近似的にトレードオフの関係になっていると言える。実際の観測において地表面変位データのみから H と速度コントラストを一意的に決定することは困難であろう。

なお、今回の解析では β を 0.5 から 0.1 まで変化させたが、 β を 0.5 より大きくしていった場合、上記の 5 つの量は山川の解に徐々に近付いていくはずであり、 $\beta = 1$ ($E_s = E_B$) となった時点で山川の解に一致する。

1.2.3.4 低速度表層が存在する場合の解析解との比較

本節の Appendix に後述するように、今回、低速度表層が存在する場合の地表面変位を表す新しい解析解を導

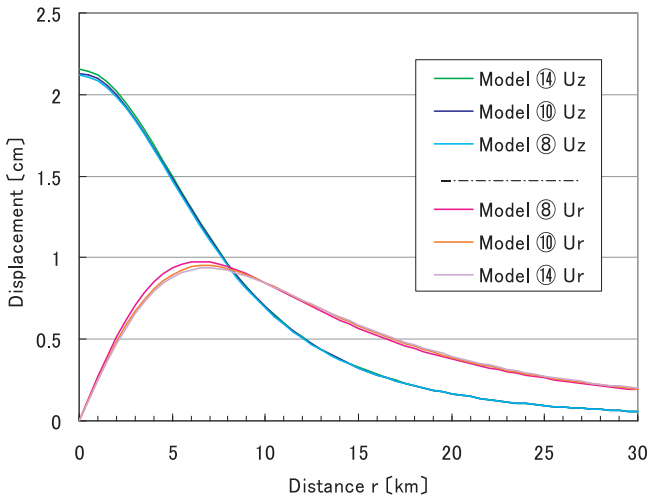


Fig. 1.2.3.8 Results of FE analysis of Models ⑧, ⑩, and ⑭. Although they do not agree completely, they are very similar to one another.

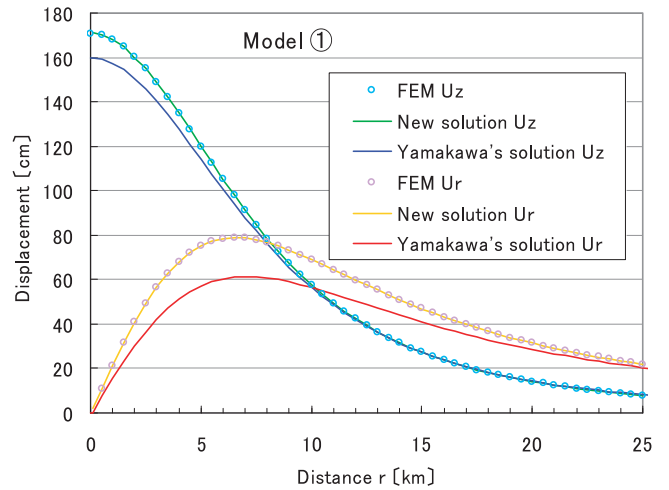


Fig. 1.2.3.9 Comparison of our new analytical solution, results of FE analysis, and Yamakawa's solution (see Fig. 1.2.3.4(a)) for Model ①.

出した。

先述のモデル①について、この新しい解析解による変位を、Fig. 1.2.3.4(a) に示した FE 解析結果および山川の解と併せて Fig. 1.2.3.9 に示す。新しい解析解と FE 解析結果は Fig. 1.2.3.9 に示した全域にわたって 0.3% 以内の高い精度で一致している（なお、この最大 0.3% の相違は FEM の数値計算誤差と考えられる）。また、図示は省略するが、モデル②および③についても同様に両者は 0.3% 以内の高い精度で一致した。従って、この解析解が正しいことが示されたと同時に、本論で用いた FEM 計算精度補正手法の妥当性も改めて確認されたと言える。

この新しい解析解は、一般に高価である有限要素法汎用ソフトウェアが利用できない環境であっても、Hankel 変換のソフトウェアさえあれば、低速度表層が存在する場合の地表面変位を計算できるのが利点である。

(坂井孝行)

Appendix 低速度表層が存在する場合の地表面変位の解析解

低速度表層が存在する場合の地表面変位を表す解析解を Hankel 変換を用いて求めた。以下、茂木－山川モデル（均質構造の場合）を Hankel 変換で表した場合と併せ、その導出過程を記述する。

なお、本稿では、「充分小さい球圧力源」（その半径が中心深さに比べて充分小さい球圧力源）を簡潔に表すのに「点圧力源」という言葉を用いる。

1. 重調和ベクトルとつりあいの式

ベクトル \mathbf{f} が、 $\nabla^4 \mathbf{f} = 0$ を満たすとき

$$\mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{f} - \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) \text{grad div } \mathbf{f} \tag{1}$$

は、弾性体のつりあいの式

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \tag{2}$$

の解である。ただし \mathbf{u} は変位ベクトルを表す。（証明省略）

ポアソン比 ν は、ラメの定数 λ, μ から

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (3)$$

と書けるので、(1)式は次のように書くこともできる。

$$\mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{f} - \frac{1}{2(1-\nu)} \text{grad div } \mathbf{f} \quad (4)$$

2. 萩原流の解

\mathbf{e}_z を z 方向の単位ベクトルとすると、 $\nabla^4 \phi = 0$ とすると

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2\mu} \{ 2(1-\nu) \phi \mathbf{e}_z \} \quad (5)$$

は、 $\nabla^4 \mathbf{f} = 0$ を満たすので、(4)式に代入して求められる \mathbf{u} は、つりあいの式(2)の解となっている。特に円筒座標 (r, φ, z) で軸対称な問題を扱うときは、 $\phi = \phi(r, z)$ すなわち $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ であるので、 \mathbf{u} の r, φ, z 方向の成分 u, v, w は次のように表される。

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \phi \\ v = 0 \\ w = \frac{1}{2\mu} \left\{ 2(1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \end{cases} \quad (6)$$

これは萩原 (1977) で用いられているのと同じ形式の解である。

また、歪テンソルの各成分は

$$\begin{cases} e_{rr} = \frac{\partial}{\partial r} u \\ e_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} \\ e_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} w \\ 2e_{\varphi z} = 0 \\ 2e_{rz} = \frac{\partial}{\partial z} u + \frac{\partial}{\partial r} w \\ 2e_{r\varphi} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

と表されるので、 Θ および応力テンソルの各成分は次のようになる。

$$\Theta = e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2\mu} (1-2\nu) \nabla^2 \phi \right\} \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \lambda\Theta + 2\mu e_{rr} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi \right\} \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\Theta + 2\mu e_{\varphi\varphi} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu \nabla^2 \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi \right\} \\ \sigma_{zz} = \lambda\Theta + 2\mu e_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (2-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi \right\} \\ \sigma_{\varphi z} = 2\mu e_{\varphi z} = 0 \\ \sigma_{rz} = 2\mu e_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi \right\} \\ \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi} = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

3. Hankel 変換で表した解

$\phi = \phi(r, z)$ を 0 次のベッセル関数 J_0 を用いた Hankel 変換で表すと,

$$\phi(r, z) = \int_0^\infty f(z, t) J_0(rt) dt \quad (10)$$

となる。これから

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi \\ &= \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - t^2 \right\} f(z, t) J_0(rt) dt \end{aligned} \quad (11)$$

$$\nabla^4 \phi = \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - t^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - t^2 \right\} f(z, t) J_0(rt) dt \quad (12)$$

なので, $\nabla^4 \phi = 0$ であるためには,

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - t^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - t^2 \right\} f(z, t) = 0 \quad (13)$$

でなくてはならない。

$$g(z, t) = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - t^2 \right\} f(z, t) \quad (14)$$

と書くことにすると, (13)式から,

$$0 = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - t^2 \right\} g(z, t) \quad (15)$$

であるので、一般に

$$g(z, t) = A(t)e^{-zt} + E(t)e^{zt} \quad (16)$$

と書くことができる。したがって (13) を満たす $f(z, t)$ は、

$$f(z, t) = A(t)e^{-zt} + B(t)ze^{-zt} + E(t)e^{zt} + F(t)ze^{zt} \quad (17)$$

という形式で書くことができる。ただし $A(t)$, $B(t)$, $E(t)$, $F(t)$ は t の適当な関数を表す。

特定の境界条件のもとで弾性体の釣り合いの式 (2) を満たす変位ベクトル \mathbf{u} を得るためには、境界条件をみたすような $A(t)$, $B(t)$, $E(t)$, $F(t)$ を求めればよい。

4. 無限媒質中の点圧力源の場合

一様な無限弾性体で原点に点圧力源がある場合を考える。詳細は省略するが、 $\phi = \phi(r, z)$ を求めると、

$$\phi = C \log(z + R) \quad (18)$$

となる。ここで $R = \sqrt{z^2 + r^2}$ であり、 C は定数を表す。変位の大きさを実際に計算する場合には、

$$C = \frac{a^3 \Delta P}{2} \quad (19)$$

として計算する必要があるが、以下では $C = 1$ の場合を扱うものとして、定数 C を省略する。

点圧力源が原点ではなく $z = D$ にある場合、(18) に相当する解は、

$$\phi = \log(z - D + R_1) \quad (20)$$

となる。ただし $R_1 = \sqrt{(z - D)^2 + r^2}$ である。

さて、Lipschitz の積分

$$\frac{1}{R} = \int_0^\infty e^{-zt} J_0(rt) dt \quad (z \geq 0, r \geq 0, z^2 + r^2 > 0) \quad (21)$$

を利用すると、(20) は次のように書くことができる。

$$\phi = \begin{cases} \int_0^\infty \left(-\frac{1}{t}\right) e^{-(z-D)t} J_0(rt) dt & (z > D) \\ \int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\right) e^{(z-D)t} J_0(rt) dt & (z < D) \end{cases} \quad (22)$$

これは(17)式で

$$\begin{cases} A(t) = -\frac{1}{t} e^{Dt} & (z > D) \\ E(t) = \frac{1}{t} e^{-Dt} & (z < D) \end{cases} \quad (23)$$

とした場合に相当し、 $\nabla^4\phi = 0$ であることは明らかである。

5. 半無限媒質中の点圧力源の場合 (茂木-山川モデルの場合)

一様な半無限弾性体で $z=D$ に点圧力源がある場合を考える。茂木-山川モデルでいえば、 z 軸を下向きにとるとき、 $z=0$ に地表があり、深さに圧力源がある場合にあたる。境界条件として

- a) $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$ ($z \rightarrow \infty$ or $r \rightarrow \infty$)
- b) $\sigma_{zz} = 0$ and $\sigma_{rz} = 0$ ($z = 0$)

でなくてはならない。

Hankel 変換を用いた解法は種々の問題に適用することができるが、ここでは茂木-山川モデルを例にして解法を少し詳しくたどってみることにする。

まず解を次の形に書くことにする。

$$\phi = \phi_0 + \phi_M \tag{24}$$

ここで ϕ_0 は (22) 式で定義される無限媒質点圧力源の解で、 $z=D$ に特異点をもつ。 ϕ_M は、半無限媒質の境界条件を満たすように付加する項で、 $z \geq 0$ に特異点を持たず $z \rightarrow \infty$ で発散しない。また、 $\nabla^4\phi = 0$ であるから、当然 $\nabla^4\phi_M = 0$ である。これらのことから (10)、(17) の形式を用いると、

$$\phi_M = \int_0^\infty [A(t) + zB(t)] e^{-zt} J_0(rt) dt \tag{25}$$

とかける。

境界条件 a) は解の形から自動的にみたされることが明らかなので、ここでは境界条件 b) のみを考えればよい。

(9) 式に従って σ_{zz} , σ_{rz} を求めるために、 $\nabla^2\phi$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi$ を扱うことにする。まず、 ϕ_0 は $z=0$ における境界条件を調べるのであるから、

$$\phi_0 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\right) e^{(z-D)t} J_0(rt) dt \tag{26}$$

としてよい。したがって、

$$\begin{cases} \nabla^2\phi_0 = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_0 = \int_0^\infty t e^{(z-D)t} J_0(rt) dt \end{cases} \tag{27}$$

である。 ϕ_M については (25) 式から

$$\begin{cases} \nabla^2\phi_M = \int_0^\infty (-2t)B e^{-zt} J_0(rt) dt \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_M = \int_0^\infty [t^2 A + t^2 zB - 2tB] e^{-zt} J_0(rt) dt \end{cases} \tag{28}$$

である。萩原 (1977) にならって $\sigma_{zz} = \sigma_z, \sigma_{rz} = \tau_{rz}$ と書くことにすれば, (9)と(27), (28)から

$$\begin{cases} \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \left\{ (2-\nu)(-2tBe^{-zt}) - te^{(z-D)t} - (t^2 A + t^2 zB - 2tB)e^{-zt} \right\} J_0(rt) dt \\ \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \left\{ (1-\nu)(-2tBe^{-zt}) - te^{(z-D)t} - (t^2 A + t^2 zB - 2tB)e^{-zt} \right\} J_0(rt) dt \end{cases} \quad (29)$$

境界条件 b) から $z=0$ で $\sigma_z = 0, \tau_{rz} = 0$ なので, (29)式の {} に $\partial/\partial z, \partial/\partial r$ の演算を行って $z=0$ を代入すると

$$\begin{cases} 0 = (1-2\nu)B + tA - e^{-Dt} \\ 0 = 2\nu B - tA - e^{-Dt} \end{cases} \quad (30)$$

が得られる。これは $A(t), B(t)$ に関する連立 1 次方程式であるから簡単に解くことができ、

$$\begin{cases} A(t) = \frac{4\nu-1}{t} e^{-Dt} \\ B(t) = 2e^{-Dt} \end{cases} \quad (31)$$

となる。すなわち

$$\phi_M = \int_0^\infty \left(\frac{4\nu-1}{t} + 2z \right) e^{-(z+D)t} J_0(rt) dt \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \phi_M \\ &= \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{1}{t} \right) e^{(z-D)t} + \left(\frac{4\nu-1}{t} + 2z \right) e^{-(z+D)t} \right\} J_0(rt) dt \quad (0 \leq z < D) \end{aligned} \quad (33)$$

という解がえられる。

茂木-山川モデルの場合は特別なケースとして解を初等関数で書き表すことができる。以下のような関数と Hankel 変換の関係を用いると、

$$\begin{cases} \log(z-D+R_1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \right) e^{(z-D)t} J_0(rt) dt & (z < D) \\ \log(z+D+R_2) = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{t} \right) e^{-(z+D)t} J_0(rt) dt & (z > -D) \\ \frac{1}{R_2} = \int_0^\infty e^{-(z+D)t} J_0(rt) dt & (z > -D) \\ \frac{z+D}{R_2} = \int_0^\infty (z+D) e^{-(z+D)t} J_0(rt) dt & (z > -D) \end{cases} \quad (34)$$

ただし, $R_1 = \sqrt{(z-D)^2 + r^2}, R_2 = \sqrt{(z+D)^2 + r^2}$

解を表す (33) 式は次のように書ける。

$$\phi = \log(z-D+R_1) + (1-4\nu)\log(z+D+R_2) - \frac{2z}{R_2} \quad (35)$$

この式は萩原 (1977) が示した茂木-山川モデルの解と本質的に同じ式である。

6. 2層構造の場合

Hankel 変換による解法は、水平な層構造がある場合にも適用できる。例として2層構造の場合、特に半無限媒質の上に表層が存在する場合の解を求めてみる。

第1層(表層)が $0 \leq z \leq d_1$ 、第2層が $d_1 \leq z$ で、第2層の $z=D$ に点圧力源が存在する場合を扱う。第 i 層の $\mu, \nu, u, w, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$ をそれぞれ $\mu_i, \nu_i, u_i, w_i, \sigma_i, \tau_i$ とする。境界条件は、

- a) $z=0$ で $\sigma_1 = 0, \tau_1 = 0$
- b) $z=d_1$ で $u_1 = u_2, w_1 = w_2, \sigma_1 = \sigma_2, \tau_1 = \tau_2$

となる。

第1層における解を

$$\phi = \int_0^\infty \left\{ [A'_1 + zB'_1] e^{-zt} + [E'_1 + (z-d_1)F'_1] e^{(z-d_1)t} \right\} J_0(rt) dt \quad (36)$$

とする。ここでは式の簡略化のために、

$$\begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ E_i \\ F_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d_{i-1}t} & -d_{i-1}e^{d_{i-1}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{d_{i-1}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-d_i t} & -d_i e^{-d_i t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-d_i t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_i \\ B'_i \\ E'_i \\ F'_i \end{pmatrix} \quad (37)$$

としている。

第2層の上部、すなわち $d_1 \leq z \leq D$ では

$$\phi = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \right) e^{(z-D)t} J_0(rt) dt + \int_0^\infty [A'_2 + (z-d_1)B'_2] e^{-(z-d_1)t} J_0(rt) dt \quad (38)$$

とする。この式の第1項は点圧力源を表しており、第2項は境界条件を満たすために付加した項である。

$$\begin{cases} E'_2 = \frac{1}{t} \\ F'_2 = 0 \\ d_2 = D \end{cases} \quad (39)$$

とおくと、(36)式と同じ形式に書くことができ扱いやすくなる。すなわち $d_1 \leq z \leq D$ で、

$$\phi = \int_0^\infty \left\{ [A'_2 + (z-d_1)zB'_2] e^{-(z-d_1)t} + [E'_2 + (z-d_2)F'_2] e^{(z-d_2)t} \right\} J_0(rt) dt \quad (40)$$

ここで

$$\mathbf{M}_k(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\mu_k} t^2 e^{-zt} & -\frac{1}{2\mu_k} t(tz-1)e^{-zt} & -\frac{1}{2\mu_k} (-t^2)e^{zt} & -\frac{1}{2\mu_k} (-t)(tz+1)e^{zt} \\ \frac{1}{2\mu_k} (-t^2)e^{-zt} & \frac{1}{2\mu_k} (-t)(tz+2-4\nu_k)e^{-zt} & \frac{1}{2\mu_k} (-t^2)e^{zt} & \frac{1}{2\mu_k} (-t)(tz-2+4\nu_k)e^{zt} \\ t^3 e^{-zt} & t^2(tz+1-2\nu_k)e^{-zt} & -t^3 e^{zt} & -t^2(tz-1+2\nu_k)e^{zt} \\ t^3 e^{-zt} & t^2(tz-2\nu_k)e^{-zt} & t^3 e^{zt} & t^2(tz+2\nu_k)e^{zt} \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{M}'_k(z) = \mathbf{M}_k(z) \begin{pmatrix} e^{d_{k-1}t} & -d_{k-1}e^{d_{k-1}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{d_{k-1}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-d_k t} & -d_k e^{-d_k t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-d_k t} \end{pmatrix} \quad (42)$$

と定義すると、 $z=0$ および $z=d_1$ における $u_i, w_i, \sigma_i, \tau_i$ の境界条件は

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}'_1(0) \begin{pmatrix} A'_1 \\ B'_1 \\ E'_1 \\ F'_1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$\mathbf{M}'_1(d_1) \begin{pmatrix} A'_1 \\ B'_1 \\ E'_1 \\ F'_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}'_2(d_1) \begin{pmatrix} A'_2 \\ B'_2 \\ E'_2 \\ F'_2 \end{pmatrix} \quad (44)$$

と書くことができる。ここで \tilde{u}, \tilde{w} は地表における変位 $\mathbf{u}_{z=0}, \mathbf{w}_{z=0}$ をあらわす Hankel 変換の kernel を意味している。

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{z=0} = \int_0^\infty \tilde{u}(t) J_1(rt) dt \\ \mathbf{w}_{z=0} = \int_0^\infty \tilde{w}(t) J_0(rt) dt \end{cases} \quad (45)$$

さて、(43), (44)をみると、(39)によって E'_2, F'_2 は既知であるので8元連立1次方程式になっていることがわかる。特に A'_1, B'_1, E'_1, F'_1 は簡単に消去することができるので、次のような4元連立1次方程式を扱えば、 $\tilde{u}, \tilde{w}, A'_2, B'_2$ を求めることができる。

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}'_1(0) \mathbf{M}'_1(d_1)^{-1} \mathbf{M}'_2(d_1) \begin{pmatrix} A'_2 \\ B'_2 \\ E'_2 \\ F'_2 \end{pmatrix} \quad (46)$$

ここでえられた \tilde{u}, \tilde{w} を(45)に代入すれば、地表における変位 $\mathbf{u}_{z=0}, \mathbf{w}_{z=0}$ が計算できる。同様に A'_2, B'_2 を(38)に代入することで第2層内の変位ベクトルを計算することができる。

また、第1層内の変位ベクトルは

$$\begin{pmatrix} A'_1 \\ B'_1 \\ E'_1 \\ F'_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}'_1(0)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

を(36)に代入することで求められる。

茂木-山川モデルの場合とは異なり、この問題における解析解は初等関数で表すことは困難である。そのため Hankel 変換を数値積分することになる。Anderson (1979) などによって各種の高速、高精度の Hankel 変換のプログラムが開発されているので、それらを利用するとよい。

(山本哲也)

参考文献

- Anderson, W. L., Computer program; numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering, *Geophysics*, **44**, 1287-1305, 1979.
- 萩原幸男, 伊豆半島の異常隆起を説明する茂木モデルとそれに伴う重力変化, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **52**, 301-309, 1977.
- 坂井孝行・山本哲也・福井敬一・藤原健治・高木朗充・中禮正明, 2007a: 有限要素法による火山性地殻変動の計算精度の確立-茂木-山川モデルの再現-, 気象研究所研究報告, **58**, 1-15.
- 坂井孝行・山本哲也・福井敬一・藤原健治・高木朗充・中禮正明, 2007b: 深さに比して相対的に大きな半径を有する球圧力源による地表面変位-有限要素法による計算-, 気象研究所研究報告, **58**, 17-30.
- 塚越利光・小高俊一, 1998: 指向性を有する圧力源に伴う地殻変動, 気象研究所研究報告, **48**, 101-113.
- 山川宜男, 1955: 内部力源による半無限弾性体の変形について. *地震*, **8**, 84-98.
- 山科健一郎, 1986: 応力場と火山噴火. *火山*, **30**, S101-119.