

付録C 一般直交曲線座標格子の使用

ここでは、球面座標を用いず、一般直交曲線座標格子を使用する場合に利用者が知っておくべき事柄について概説する。

C.1 概要

海洋モデルにおいては陸地の計算はしないので南極点に関する大きな問題は生じない。しかし、海洋内部の1点に経線が集中する北極点については問題がある。まず、北極点をとりまく U-box とその北側にある T-box の位置関係が基本的に特異であるため、物理量の時間発展の差分計算をそこだけ特別な方法で行う必要がある。次に、北極点に接していなくてもその近傍では東西方向の格子間隔が極めて小さい。このため CFL 条件によって、積分タイムステップを小さくせざるを得ず、それは計算所要時間の増大に直接反映する。また低緯度と北極域での格子間隔が極端に異なる場合、拡散・粘性等の計算スキームやパラメータを全領域で一律に適用することができない。

北極に関するこのような問題を回避するための方法として以下が考えられる。1) 北極に巨大な島を作ってしまう。または、北極点周辺領域での数値計算を放棄し、気候値等を側面境界条件として与える。2) 高緯度で、経度方向の平均操作を加える（極フィルター）。3) モデルの格子系を変えることにより、モデルの極が大陸もしくは巨大な島の中におさまるようにする。以上の三つの方法はすべて MRI.COM で利用可能である。この節では 3) に関連して必要になる事項について説明する。

MRI.COM のコードは一般直交座標系を前提とするもの書き換えられた。これにより、海洋内部の数値計算においては、地理的緯度 (ϕ)・経度 (λ) について意識する必要はなく、直交座標格子であることが保証されていれば、モデルの両極を任意の地点に置くことができる。

しかし数値計算を始める前に、 $\lambda \cdot \phi$ の関数として与えられる海陸分布・水深・スケールファクター・コリオリパラメータ等を、モデルで採用する座標系の格子点値として求めておく作業が不可欠である。モデルの両極の位置を任意に設定し、直交座標格子系を生成する方法について C.2 で説明する。そこでは地理座標格子系 (λ, ϕ) に広義の等角写像を適用することでモデル座標格子系 (μ, ψ) を生成する。同時に関数関係 $\lambda(\mu, \psi), \phi(\mu, \psi)$ および $\mu(\lambda, \phi), \psi(\lambda, \phi)$ を得る。

大気境界条件は多くの場合地理座標格子点値として与えられるので、海面気温・風応力等の変換形式をあらかじめ準備しておく必要がある。ベクトル量についてはモデル座標の縦・横方向が地理的な南北・東西と異なることを考慮しなければならない。これについて C.3 で解説する。スカラー量については水深やコリオリパラメータと同様に $(\lambda, \phi) \iff (\mu, \psi)$ の関係を使えばよいが大気が海洋に与えるフラックスと海洋が受け取るフラックスが総量で一致することが求められる。その実現方法について C.4 で検討する。

C.2 モデルの極を任意の位置に移動して直交座標系を生成する

球面上から北極点で球面に接する平面への投影（ポーラステレオ図法）は広義の等角写像である。この平面において複素平面上の等角写像を考えることができる。そこで、球面上の点 \rightarrow 北極点で球面に接する複素平面上の点 \rightarrow 等角写像によって得られる複素平面上の点 \rightarrow 球面上の点、という手順で直交座標系格

付録C 一般直交曲線座標格子の使用

子点を得ることができる (Bentzen et al., 1999)。ここでは、複素平面上的等角写像として一次分数変換を用いた例を示す。

数値計算で使用するモデル座標系 $(\mu, \psi) : \mu \in [0, 2\pi], \psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ について、まず $\psi \rightarrow \pi/2 - \psi$ とする。つまり、モデルの北極を $\psi = 0$ 、モデル南極を $\psi = \pi$ とする ($\psi \in [0, \pi]$)。

モデル座標上の点 (μ, ψ) は、北極点で球面に接する複素平面上的点

$$\zeta = \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) e^{i\mu} \quad (\text{C.1})$$

に投影される。一次分数変換を用いて

$$z = \frac{b\zeta(c-a) + a(b-c)}{\zeta(c-a) + (b-c)} \quad (\text{C.2})$$

z を球面上の座標で表示すると、

$$\lambda = \arg(z), \quad \phi = 2 \arctan |z| \quad (\text{C.3})$$

を得る。ここで

$$a = \tan\left(\frac{\phi_a}{2}\right) e^{i\lambda_a}, \quad b = \tan\left(\frac{\phi_b}{2}\right) e^{i\lambda_b}, \quad c = \tan\left(\frac{\phi_c}{2}\right) e^{i\lambda_c} \quad (\text{C.4})$$

はそれぞれモデル座標の北極、南極、 $(0, \frac{\pi}{2})$ に対応する地理座標 (λ, ϕ) 上の位置に対応する。

以上から、関数 $\lambda(\mu, \psi)$ 、 $\phi(\mu, \psi)$ が得られる。ただし、一般的な緯度表示にもどすために $\phi \rightarrow \pi/2 - \phi$ とする。こうして、モデル格子点がたとえば $(\Delta\mu \times i, \Delta\psi \times j)$ で与えられれば、その点の地理的な位置がただちに得られる。

変換を逆にたどれば、すなわち

$$z = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) e^{i\lambda} \quad (\text{C.5})$$

$$\zeta = \frac{(z-a)(b-c)}{(c-a)(b-z)} \quad (\text{C.6})$$

$$\mu = \arg(\zeta), \quad \psi = 2 \arctan |\zeta| \quad (\text{C.7})$$

として、関数 $\mu(\lambda, \phi)$ 、 $\psi(\lambda, \phi)$ を得る。(C.2) 式と (C.6) 式は同じ変換をあらわすことに注意。

References

- Bentzen, M., G. Evensen, H. Drange, and A.D. Jenkins, 1999: Coordinate transformation on a sphere using conformal mapping, *Mon. Wea. Rev.*, **127**, 2733-2740.

C.3 ベクトルの回転角

地理座標 (λ, ϕ) 上のベクトルをモデル座標 (μ, ψ) から見たときの回転角について。

$$z = f(\zeta), \quad z = x + iy, \quad \zeta = u + iv \quad (\text{C.8})$$

とすると、

$$f'(\zeta) = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} - i \frac{\partial x}{\partial v} \quad (\text{C.9})$$

である。

$z_0 = f(\zeta_0)$ において、曲線 $v = v_0$ が直線 $y = y_0$ に対してなす角を θ とすると、

$$\tan \theta = \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_{v_0} = \left[\frac{\partial y}{\partial u} / \frac{\partial x}{\partial u} \right]_{v_0}$$

から

$$\theta = \arg(f'(\zeta_0)) \quad (\text{C.10})$$

であることがわかる (図 C.1 参照)。

$\lambda = \arg(z)$, $\mu = \arg(\zeta)$ とする。 ζ_0 において、直線 ($v = v_0$) が直線 ($\mu = \mu_0$) に対してなす角は $-\mu_0$ であり、 z_0 において、直線 ($\lambda = \lambda_0$) が曲線 ($v = v_0$) に対してなす角は $\lambda_0 - \theta$ であるから、結局、 $\lambda\phi$ 座標の経線 ($\lambda = \lambda_0$) が $\mu\psi$ 座標の経線 ($\mu = \mu_0$) に対してなす角は、

$$\lambda_0 - \mu_0 - \theta \quad (\text{C.11})$$

となる。

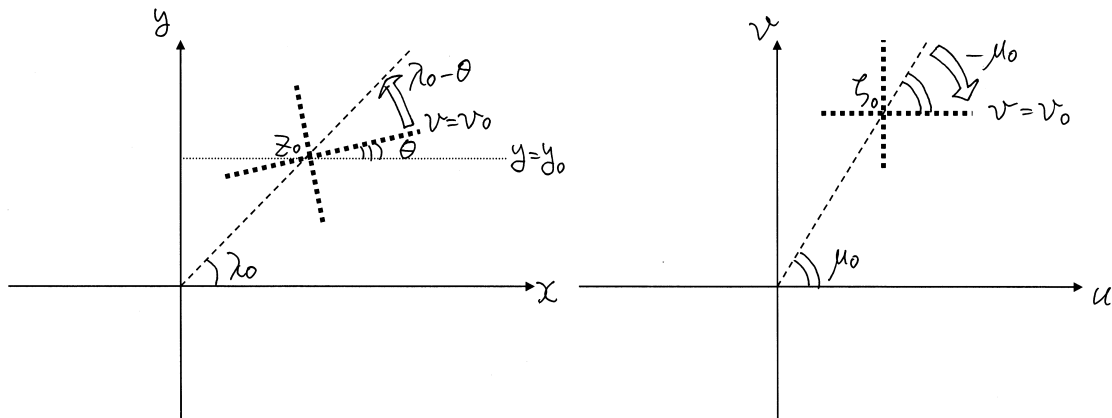


図 C.1: (λ, ϕ) 座標系 (左) と (μ, ψ) 座標系 (右) におけるそれぞれの経線の関係。

C.4 地理座標格子からモデル座標へ物理量を移す

地理座標格子 $G_{I,J}$ 、モデル座標格子 $H_{M,N}$ をそれぞれ適当に細分したものを $G_{i,j}$ 、 $H_{m,n}$ とし、フィルター格子と呼ぶことにする。 $G_{I,J}$ にフラックス $F_{I,J}$ が与えられたとき、 $G_{I,J}$ のカバーする領域内の $G_{i,j}$ について、

$$F_{i,j} = F_{I,J}$$

としておき、 $H_{m,n}$ 格子に最も近い $G_{i,j}$ 格子のフラックス値を $H_{m,n}$ 格子のフラックスとする。

$$F_{m,n} = F_{i(m,n),j(m,n)} \quad (\text{C.12})$$

$H_{M,N}$ のカバーする領域内の全ての $F_{m,n}$ について面積重み付き平均をとり、それを $H_{M,N}$ 格子に与えるフラックスとする (図 C.2 参照)。

$$F_{M,N} = \frac{1}{\text{面積}(H_{M,N})} \sum_{m,n} F_{m,n} \times \text{面積}(H_{m,n}) \quad (\text{C.13})$$

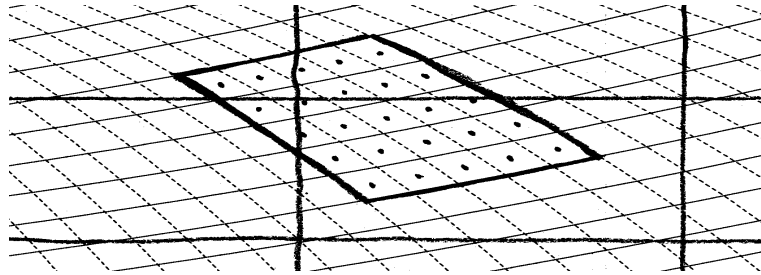


図 C.2: 地理座標格子とモデル座標格子をそれぞれ細分する。

$G_{i,j}$ 、 $H_{m,n}$ を極限まで細かくすると、地理格子上で与えられたフラックスの総量はモデル格子上で保存されるはずである。そのときのモデル格子上のフラックス分布を $F_{M,N}^\infty$ とおく。実際に $1^\circ \times 1^\circ$ 程度の地理座標格子で定義された物理量を同様な解像度のモデル格子に与える方法を考える。

1) 細かい (たとえば $1/100^\circ \times 1/100^\circ$) フィルター格子を使って、各 $H_{M,N}$ 格子と $G_{I,J}$ 格子との面積重み付き対応関係をあらかじめ計算しておく。 $w_{M,N,I,J}$ を配列として覚えておけばよい。

$$F_{M,N} = \sum_{I,J} w_{M,N,I,J} \times F_{I,J}$$

2) フィルター格子を適当に粗く設定し、 (m,n) 格子に最も近い (i,j) 格子をあらかじめ求め、配列 $i(m,n), j(m,n)$ として覚えておく。この場合は (C.13) 式を毎回計算する。

モデル格子上のフラックス $F_{M,N}$ を計算するとき、1) の方法では、モデル格子の解像度に応じて必要な配列の大きさと演算量が大きくなる。2) の方法によれば、主にフィルター格子の解像度によって配列の大きさと演算量が決まる。2) は、求められるフラックスの精度によってフィルター格子の設定を細かくすればよく、高解像度モデル向きと考えられる。

フィルター格子間隔のオーダーとフラックス誤差のオーダーは、ほぼ比例関係になる。