

第8章 混合層モデル

海面境界層では、風による運動量の注入等により、乱流が活発であり、成層が不安定でなくとも鉛直方向の混合が生じるが、この現象はモデルの基本方程式では表せない*。そこで、大循環モデルでは、大規模場（モデルにおける流速や水温などの予報変数）の状態を用いてこれらの現象を表現する。MRI.COM では、一層目の鉛直粘性係数、拡散係数をあらかじめ大きくとるか、8.1 節の Mellor and Yamada (1982) の乱流境界層モデル（level 2.5）・8.2 節の Noh and Kim (1999) の乱流混合層モデル・8.3 節の Large et al. (1994) の K-profile parameterization のいずれかを用いて、鉛直粘性・拡散係数を毎時間ステップ計算する。表 8.1 に各節における、鉛直粘性・拡散係数をはじめ、各混合層モデル内で予報、診断される物理量の表記についてをまとめた。

表 8.1: 各混合層モデルで予報、診断される物理量と各モデル解説中での変数名

| 物理量 (MRI.COM での変数名) | Mellor and Yamada | Noh and Kim | KPP |
|---------------------------------|-------------------|-------------|-------|
| 拡散係数 (avdsl) | K_H | K_B | K_x |
| 粘性係数 (avm) | K_V | K | K_x |
| 乱流速度 (q : Mellor-Yamada のみ) | q | - | - |
| 乱流運動エネルギー (eb : Noh and Kim のみ) | $q^2/2$ | E | - |
| 乱流の鉛直スケール (alo : KPP 以外) | l | l | - |

8.1 Mellor and Yamada's Turbulence Closure Model

8.1.1 乱流モデル

流体運動を記述する基本方程式に現れる物理量を、平均成分とそれからの「ずれ」の成分に分け、方程式の時間平均をとったとき、平均速度 U 、平均圧力 P 、平均ポテンシャル水温 Θ に対する式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i) \quad (8.1)$$

$$\rho \frac{DU_j}{Dt} + \rho \varepsilon_{jkl} f_k U_l = \frac{\partial}{\partial x_k}(-\rho \langle u_k u_j \rangle) - \frac{\partial P}{\partial x_j} - g_j \rho \quad (8.2)$$

$$\rho \frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k}(-\rho \langle u_k \theta \rangle) \quad (8.3)$$

となる。ここで、 $D(\cdot)/Dt \equiv U_k \partial(\cdot)/\partial x_k + \partial(\cdot)/\partial t$ 、 g_j は重力ベクトル、 f_k はコリオリベクトル、 ε_{ijk} は交替テンソルである。大文字の物理量は平均量（大循環モデルの物理場）、小文字の物理量は乱流成分（大循環モデルで表現できない物理場）を、 $\langle \rangle$ は乱流成分の統計的平均を表す。塩分に対する式は (8.3) と同様である。上式では、Boussinesq 近似（式 (8.2) の浮力項以外では密度を定数とする）を行っていないが、以

*非静力学モデルを導入することなどによりこれらは可能になるが、将来の課題である。

第8章 混合層モデル

下では Boussinesq 近似を行なう。また、密度が水温だけでなく、塩分にもよるとすると、非常に煩雑になるので、ここでは、密度は水温だけの関数であるとして議論を進める。

さて、上式に現れた乱流成分の統計的平均 ($\langle \rangle$) を各時刻で求めれば、大規模場の物理量の時間発展も解けるわけであるが、実際にそれらを求める式を導出してみようとするればわかるように (例えば乱流速度の共分散項を求めるには、乱流速度の方程式に乱流速度をさらに掛けた上で統計的平均をとる)、非常に複雑な形をしている上に、未知の乱流成分の高次項もでてくる。これらの未知の高次項を求めるためには、さらに方程式の数を増やす必要がある。つまり、問題が閉じていない。従って、どこかで問題を閉じなければならない。これを closure と呼ぶ。乱流成分の2次の項までで問題を閉じさせるものを second moment closure といい、乱流のモデル化に広く使われている。ここでは、それらの式の導出は行なわないが、導出に興味のある者は Kantha and Clayson (2000) を参照されたい。

実際にでてくる高次の項に対しては、以下のように低次化を行なう。以下の低次化はあくまで Mellor and Yamada (1982) が選んだ低次化手法であり、必ずしも一意ではないことに注意。

Rotta (1951a,b) のエネルギー再分配仮説により、圧力と速度の勾配の共分散を、Reynolds stress の線形関数とする:

$$\left\langle \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle = -\frac{q}{3l_1} \left(\langle u_i u_j \rangle - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right) + C_1 q^2 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (8.4)$$

ここに、 $q^2 \equiv \langle u_i^2 \rangle$ 、 l_1 は長さのスケール、 C_1 は無次元定数、 δ_{ij} はクロネッカーの ($=1(i=j), =0(i \neq j)$) である。

Kolmogorov の小スケールにおける等方性仮説を用いて、エネルギー消散を以下のようにモデル化する。

$$2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle = -\frac{2}{3} \frac{q^3}{\Lambda_1} \delta_{ij} \quad (8.5)$$

ここに、 ν は粘性係数、 Λ_1 は長さのスケールである。

これらと同じ形式で、温度の再分配、熱の消散を以下のようにモデル化する。

$$\left\langle \frac{p}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right\rangle = -\frac{q}{3l_2} \langle u_j \theta \rangle \quad (8.6)$$

$$(\kappa + \nu) \left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right\rangle = 0 \quad (8.7)$$

ここに、 κ は熱拡散係数、 l_2 は長さのスケールである。温度の分散の消散については、

$$2\kappa \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right\rangle = -2 \frac{q}{\Lambda_2} \langle \theta^2 \rangle \quad (8.8)$$

とする。ここに、 Λ_2 は長さのスケールである。

それでもまだ、高次の項は残ってしまうため、乱流速度拡散項等について次のモデル化を行なう。

$$\langle u_k u_i u_j \rangle = \frac{3}{5} l q S_q \left(\frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (8.9)$$

$$\langle u_k u_j \theta \rangle = -l q S_{u\theta} \left(\frac{\partial \langle u_k \theta \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \theta \rangle}{\partial x_k} \right) \quad (8.10)$$

$$\langle u_k \theta^2 \rangle = -l q S_\theta \frac{\partial \langle \theta^2 \rangle}{\partial x_k} \quad (8.11)$$

$S_q, S_{u\theta}, S_\theta$ は無次元数で、定数とするか、何らかのパラメータの関数とする。この他、 $\langle p\theta \rangle = 0$ 、 $\langle pu_i \rangle = 0$ とする。

Mellor-Yamada の混合層モデルの本質的なところは、上に出てきた長さのスケールが互いに比例関係にあるとるところである。

$$(l_1, \Lambda_1, l_2, \Lambda_2) = (A_1, B_1, A_2, B_2)l \quad (8.12)$$

l は乱流の鉛直スケール (master length scale と呼ばれる) である。

A_1, B_1, A_2, B_2 および既出の C_1 は定数で、実験データから決められる。Mellor and Yamada (1982) では、 $(A_1, B_1, A_2, B_2, C_1) = (0.92, 16.6, 0.74, 10.1, 0.08)$ を採用している。

8.1.2 The level-2.5 Model

前節までの単純化を施し、乱流成分の 2 次までの統計的平均量の時間発展を解く乱流モデルを level-4 モデルと呼ぶ。

level-3 では、乱流運動エネルギー ($q^2/2$)、ポテンシャル水温の分散 ($\langle \theta^2 \rangle$) (場合によっては、ポテンシャル水温と塩分の共分散 ($\langle \theta s \rangle$)、塩分の分散 ($\langle s^2 \rangle$)) の時間発展を解き、他の統計的平均量は定常状態にあるとして、代数方程式を診断的に解く。

level-2.5 モデルではポテンシャル水温の分散も統計的定常状態にあるとする (後出の (8.30) 式参照)。

level-2 モデルでは、乱流運動エネルギーも統計的定常状態にあるとする。

MRI.COM の表層境界層モデルとして用いるのは、level-2.5 に以下の境界層モデルとしての簡略化を施したものである。

- 乱流成分の運動方程式でコリオリ項を無視
- 運動方程式の鉛直成分で静水圧平衡
- 速度の空間微分については、(境界に対して垂直な方向である) 鉛直微分だけを残す

大規模場の方程式は

$$\rho \frac{DU}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \langle uw \rangle = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho fV \quad (8.13)$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \langle vw \rangle = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho fU \quad (8.14)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \quad (8.15)$$

$$\rho \frac{D\Theta}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \langle w\theta \rangle) = 0 \quad (8.16)$$

となり、乱流成分の 2 次の量に対しては、乱流エネルギーに対する時間発展方程式と、その他の 2 次の量に対する代数方程式となる。

乱流エネルギーの時間発展方程式は、

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{q^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left[lqS_q \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q^2}{2} \right) \right] = P_s + P_b - \varepsilon \quad (8.17)$$

である。ここで、

$$P_s = -\langle wu \rangle \frac{\partial U}{\partial z} - \langle wv \rangle \frac{\partial V}{\partial z} \quad (8.18)$$

は平均流のシアーによるエネルギー生成項、

第 8 章 混合層モデル

$$P_b = -g \langle w\rho \rangle / \rho_0 \quad (8.19)$$

は浮力によるエネルギー生成項、

$$\varepsilon = q^3 / \Lambda_1 \quad (8.20)$$

はエネルギーの消滅項である。

そのほかの乱流成分の 2 次で表される項の統計的平均値に対する代数方程式は

$$\langle u^2 \rangle = \frac{q^2}{3} + \frac{l_1}{q} \left[-4 \langle wu \rangle \frac{\partial U}{\partial z} + 2 \langle wv \rangle \frac{\partial V}{\partial z} - 2P_b \right] \quad (8.21)$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{q^2}{3} + \frac{l_1}{q} \left[2 \langle wu \rangle \frac{\partial U}{\partial z} - 4 \langle wv \rangle \frac{\partial V}{\partial z} - 2P_b \right] \quad (8.22)$$

$$\langle w^2 \rangle = \frac{q^2}{3} + \frac{l_1}{q} \left[2 \langle wu \rangle \frac{\partial U}{\partial z} + 2 \langle wv \rangle \frac{\partial V}{\partial z} + 4P_b \right] \quad (8.23)$$

$$\langle uv \rangle = \frac{3l_1}{q} \left[-\langle uw \rangle \frac{\partial V}{\partial z} - \langle vw \rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right] \quad (8.24)$$

$$\langle wu \rangle = \frac{3l_1}{q} \left[-(\langle w^2 \rangle - C_1 q^2) \frac{\partial U}{\partial z} - g \langle u\rho \rangle \right] \quad (8.25)$$

$$\langle vw \rangle = \frac{3l_1}{q} \left[-(\langle w^2 \rangle - C_1 q^2) \frac{\partial V}{\partial z} - g \langle v\rho \rangle \right] \quad (8.26)$$

$$\langle u\theta \rangle = \frac{3l_2}{q} \left[-\langle uw \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \langle w\theta \rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right] \quad (8.27)$$

$$\langle v\theta \rangle = \frac{3l_2}{q} \left[-\langle vw \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \langle w\theta \rangle \frac{\partial V}{\partial z} \right] \quad (8.28)$$

$$\langle w\theta \rangle = \frac{3l_2}{q} \left[-\langle w^2 \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial z} - g \langle \theta\rho \rangle \right] \quad (8.29)$$

$$\langle \theta^2 \rangle = -\frac{\Lambda_2}{q} \langle w\theta \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (8.30)$$

となるが、一部にさらなる簡単化を施して

$$-\langle uw \rangle = K_M \frac{\partial U}{\partial z} \quad (8.31)$$

$$-\langle vw \rangle = K_M \frac{\partial V}{\partial z} \quad (8.32)$$

$$-\langle \theta w \rangle = K_H \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (8.33)$$

$$K_M = lqS_M \quad (8.34)$$

$$K_H = lqS_H \quad (8.35)$$

とする。

このモデル化は、大規模場の勾配に比例した乱流フラックスがあるとするものである。混合層モデルの究極目的は、ここに現れた、運動量フラックス、熱フラックスを表現する係数、 K_M, K_H を求めることである。

ポテンシャル水温（・塩分）とポテンシャル密度に線形の関係があることを仮定すると、煩雑な計算の後に、 S_M と S_H についての連立方程式が求められる。

$$\begin{aligned} S_M[6A_1A_2G_M] + S_H[1 - 3A_2B_2G_H - 12A_1A_2G_H] &= A_2 \\ S_M[1 + 6A_1^2G_M - 9A_1A_2G_H] - S_H[12A_1^2G_H + 9A_1A_2G_H] &= A_1(1 - 3C_1) \end{aligned} \quad (8.36)$$

なお、ここで、

$$G_M \equiv \frac{l^2}{q^2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (8.37)$$

$$G_H \equiv \frac{l^2}{q^2} \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \quad (8.38)$$

とした。 $\partial \tilde{\rho} / \partial z$ はポテンシャル密度の鉛直勾配である。

こうして、 S_M と S_H が決まれば、あとは、 q と l を決めれば (8.34) と (8.35) から K_M, K_H が求まる。

q は式 (8.17) を上を用いて変形した下の式を解いて求める。

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{q^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left[K_q \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q^2}{2} \right) \right] = K_M \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{g}{\rho_0} K_H \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} - \varepsilon \quad (8.39)$$

ここで、 $K_q = lqS_q$ である。MRI.COM では、 $S_q \propto S_M$ とし、中立成層 ($G_H = 0$) のとき $S_q = 0.2$ となるように、 $S_q = S_{qc}S_M/S_{Mn}$ 、($S_{qc} = 0.2, S_{Mn} = S_M(G_H = 0) = 0.3927$) としている。

境界条件は、境界面で

$$\frac{\partial q^2}{\partial z} = l = 0 \quad (8.40)$$

とする。 q に関する条件は海面（密度 ρ_s ）で、応力 (τ_s) によって為された仕事とエネルギー消散が釣り合うとする。つまり、摩擦速度を $u_\tau \equiv (\tau_s/\rho_s)^{1/2}$ として、 $\rho_s q^3/\Lambda_1 = \tau_s u_\tau/l$ と (8.12) から

$$q^2 = B_1^{2/3} u_\tau^2 \quad (8.41)$$

とする。

乱流の鉛直スケール（master length scale）は、時間発展方程式（物理的根拠が完全ではない、経験的なものが多い）を用いるものから、診断的に求めるものまで、様々なものがある。MRI.COM では次の診断方程式で求める：

$$l = \gamma \int_{z_b}^0 |z'| q dz' / \int_{z_b}^0 q dz' \quad (8.42)$$

ここで、 $\gamma = 0.2$ 、 z_b は海底の深度である。これは運動エネルギーで重みをつけた平均深度と解釈できる。Mellor and Yamada (1982) によれば、海洋の境界層においては、これでも十分とのこと。

8.1.3 解く手続き

ここで、改めてモデルにおける解く手続きを簡単に記す。

混合層モデルは各タイムステップ（ n とする）の最初に呼ばれる（サブルーチン名 MYSL25）、時間方向に前方差分（ $n \rightarrow n+1$ ）を用いているため、サブプログラム内では、前のタイムステップで求めておいた q と l 、及び (8.34) ~ (8.36) を用いて、タイムステップ n における鉛直粘性係数、拡散係数を求める。

第8章 混合層モデル

続いてタイムステップ $n+1$ における q と l を求める。乱流運動エネルギーは (8.39)、(8.12)、(8.20)、(8.41) 等を用いる。一般に乱流運動エネルギーの鉛直方向の伝導係数 K_q は大きくなるので、陰解法を用いる (8.4 節参照)。

乱流の鉛直スケール (master length scale) は (8.42) を計算して求める。

8.2 Noh and Kim (1999) の乱流混合層モデル

Mellor and Yamada の混合層モデルは元来、大気境界層を想定したモデルであり、下部境界条件を『壁』としていた。海洋への適用に際しては、『壁』で風応力による運動量注入があるとしているが、乱流による混合層の形成の再現はあまり良くないことが指摘されてきた。

Noh and Kim (1999) は、その点を解決できるモデルを提示した。基本的には、Mellor and Yamada と同じ second moment closure である。

8.2.1 基本方程式

東西流速 U 、南北流速 V 、浮力 $B = -g\Delta\rho/\rho_0$ 、乱流エネルギー E に対する方程式は大規模場に対し

$$\frac{DU}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial z} \langle uw \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + fV \quad (8.43)$$

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial z} \langle vw \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - fU \quad (8.44)$$

$$\frac{DB}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial z} \langle bw \rangle - \frac{\partial R}{\partial z} \quad (8.45)$$

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial z} \left\langle w \left(\frac{p}{\rho} + uu + vv + ww \right) \right\rangle - \langle uw \rangle \frac{\partial U}{\partial z} - \langle vw \rangle \frac{\partial V}{\partial z} - \langle bw \rangle - \varepsilon \quad (8.46)$$

となる。ここで、 R は短波放射で、 $\partial R/\partial z$ は短波放射の収束を表す。なお、鉛直座標は下向きを正とした。乱流フラックスを大規模場 (大文字) を使って表現すると、

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + fV \quad (8.47)$$

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - fU \quad (8.48)$$

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_B \frac{\partial B}{\partial z} \right) - \frac{\partial R}{\partial z} \quad (8.49)$$

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_E \frac{\partial E}{\partial z} \right) + K \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} + K \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} + \left(K_B \frac{\partial B}{\partial z} \right) - \varepsilon \quad (8.50)$$

となる。

問題は粘性・拡散係数 (K, K_B, K_E) および乱流エネルギー消散率 (ε) の決め方である。

乱流の代表的速度 ($q = (2E)^{1/2}$) と乱流の鉛直スケール (l) を用いて、

$$K = S_q l \quad (8.51)$$

$$K_B = S_B q l \quad (8.52)$$

$$K_E = S_E q l \quad (8.53)$$

$$\varepsilon = C q^3 l^{-1} \quad (8.54)$$

とする。 (S, S_B, S_E, C) は実験等から決まる定数であるが、成層がない場合には、 $S = S_0 = 0.39$ 、 $Pr = S/S_B = 0.8$ 、 $\sigma = S/S_E = 1.95$ 、 $C = C_0 = 0.06$ を用いる。

成層の影響については、乱流の鉛直スケールは、浮力の鉛直スケール $l_b = q/N$ 、 $(N^2 = -\partial B/\partial z)$ に制限されるとする。つまり、

$$K \sim ql_b \sim qNR_i^{-1/2} \quad (8.55)$$

ここで、 Ri_t は乱流リチャードソン数

$$Ri_t = (Nl/q)^2 \quad (8.56)$$

である。

これは、成層が強い (N が大きい) 時には、乱流エネルギーの注入により内部波が発生し、水平方向に伝播してしまい、乱流エネルギーが下方に伝わらないことを表したものである (Ri_t が大きいと、 K は小さい)。このとき、局所的な乱流エネルギーの減衰が大きくなるとも考えられる。

Ri_t が大きいときに、(8.55) が成り立つように S について以下の式を用いる。

$$S/S_0 = (1 + \alpha Ri_t)^{-1/2} \quad (8.57)$$

ここで α はチューニングパラメータであり、Noh and Kim (1999) では $\alpha \sim 120.0$ 程度の値が推奨されている。

C についても同様に

$$C/C_0 = (1 + \alpha Ri_t)^{1/2} \quad (8.58)$$

とする。

乱流の鉛直スケールは

$$l = \frac{\kappa(z + z_0)}{(1 + \kappa(z + z_0)/h)} \quad (8.59)$$

とする。 z_0 は海面の粗度で、($z_0 = 1$ [m])、 z は水深、 h は混合層深度である。混合層が深いと鉛直スケールも長いということになる。

境界条件は

$$K \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\tau}{\rho_0} \quad (8.60)$$

$$K_B \frac{\partial B}{\partial z} = Q_0 \quad (8.61)$$

$$K_E \frac{\partial E}{\partial z} = mu_*^3 \quad (8.62)$$

m はチューニングパラメータで、Noh and Kim (1999) では $m = 100$ である。

不安定成層をしている場合 ($N^2 < 0$) の場合には、 $K = K_B = 1.0$ [m²s⁻¹] とするが、 K_E はこのモデルから求められる乱流運動速度と、鉛直スケールから求めるものとする。鉛直対流の時間スケールと、乱流が発達するスケールの違いを考慮したものであるが、運動量の拡散 (K) についても、同様にすべきかもしれない。

8.2.2 解く手続き

プログラム nkobl.m.F90 では E を予報変数として、式 (8.50) を解く。時間方向に前方差分を用いる。各ステップの時間積分が始まる前に、現在の E や N を元にして、粘性・拡散係数、消散率を求める。エネルギーに対する拡散係数を用いて新しい (次の時間ステップに用いられる) E を求める。

8.3 K Profile Parameterization (KPP)

8.3.1 概要

K profile parameterization (KPP) とは、境界近傍における Monin-Obukhov の相似則に従って混合（境界）層内における乱流鉛直速度スケールを決め、別に求めた混合層厚と（無次元形状関数と）の積として鉛直粘性拡散係数を決定する方法（図 8.1、式 8.69）である。混合層以深の係数 ν_x は内部とは別に設定（MRI.COM では背景係数）し、混合層内部の係数と連続につなぐ。このように、Mellor and Yamada (1982) に代表されるような乱流エネルギーの発展方程式を解く混合層モデルとは系列が異なる。KPP スキームは、大気モデルで使用されていた nonlocal K profile model (Troen and Mahrt 1986) を Large et al. (1994) が海洋に適用させたものである。MRI.COM の KPP サブルーチンは、NCEP 海洋モデル (NCOM) のサブルーチンが元になっている。

乱流渦による平均量 X の時間変化は乱流フラックス $\langle wx \rangle$ の鉛直発散で表現される。ここでは、 X は流速 U 、 V 、水温 T 、塩分 S 、浮力 B などの時間平均成分を表し、 x は流速 u 、 v 、水温 T 、塩分 s 、浮力 b などの乱流成分を表す。また、 w は乱流渦による鉛直流速である（上向き正）。以下、運動量成分は m 、スカラー成分は s と表すこともある。

$$\partial_t X = -\partial_z \langle wx \rangle \quad (8.63)$$

KPP スキームでは、混合層内部において、乱流フラックスが X の鉛直勾配項と nonlocal[†] 輸送項で表現される。すなわち、

$$\langle wx \rangle = -K_x (\partial_z X - \gamma_x) \quad (8.64)$$

MRI.COM の KPP サブルーチンでは、以下の順序で鉛直粘性拡散係数 K_x と nonlocal 輸送 γ_x が計算される。

- 海面強制フラックス（運動量、浮力） $\langle wx_0 \rangle$ の計算
- 安定度スケール L の計算
- 混合層厚 h の計算
- 無次元普遍関数 ϕ_x の計算
- 乱流鉛直速度スケール w_x の計算
- 混合層内鉛直粘性拡散係数 K_x の計算
- 混合層基底で、混合層以深の係数 ν_x と連結
- nonlocal 輸送量 γ_x の計算

8.3.2 Monin-Obukhov の相似則

海面ごく近傍の境界層では、Monin-Obukhov の相似則が成立する。この境界層では、海面からの距離 $d(= -z)$ と海面フラックス $\langle wx_0 \rangle$ のみが重要となり、これらのパラメータから次の 3 つの基本的乱流パラメータが作られる。

[†] nonlocal とは、局所的に平均場の勾配 $\partial X / \partial z$ が正であっても（この場合、一般にフラックスは下向き、つまり勾配を下る方向であることが期待される）、乱流成分 $\partial x / \partial z$ が作る勾配などにより、上向き（つまり平均場の勾配とは逆向き）に物質が輸送される現象のことをいう。

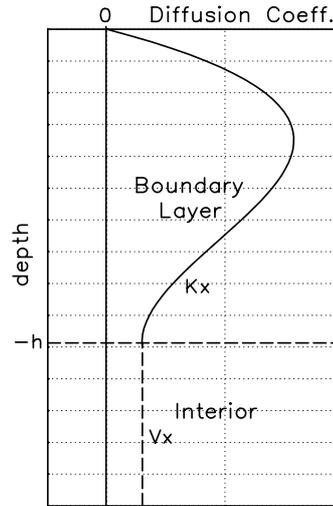


図 8.1: KPP の概念図

- 摩擦速度

$$u^{*2} = (\langle wu_0 \rangle^2 + \langle wv_0 \rangle^2)^{1/2} = |\bar{\tau}_0|/\rho_0 \quad (8.65)$$

- スカラー（水温塩分）の乱流スケール

$$S^* = -\langle ws_0 \rangle / u^* \quad (8.66)$$

- Monin-Obukhov の安定度スケール

$$L = u^{*3} / (\kappa B_f) \quad (8.67)$$

ここで、 $\bar{\tau}_0$ は海面風応力、 ρ_0 は密度、 $\kappa = 0.4$ は von Karman 定数、 B_f は浮力フラックス（海洋に入ってくるものを正とするので、負の場合が不安定；海洋の中での向き（上向き正）との相違に注意）である。また、境界層内（ $d < \epsilon h$ [$\epsilon \ll 1$ 、一般に $\epsilon \sim 0.1$]) ではフラックスが一定である必要はないが、海面フラックス $\langle wx_0 \rangle$ （とそれから派生する u^* , S^* , L ）が重要であることに変わりはなく、その場合、流速、水温塩分の鉛直勾配の無次元プロファイルが安定度パラメータ $\zeta = d/L$ の関数として定義される。

$$\begin{aligned} \phi_m(\zeta) &= \frac{\kappa d}{u^*} \partial_z (U^2 + V^2)^{1/2} \\ \phi_s(\zeta) &= \frac{\kappa d}{S^*} \partial_z S \end{aligned} \quad (8.68)$$

これらの関数は観測などで経験的に決められる。

8.3.3 鉛直粘性拡散係数

混合層内の鉛直粘性拡散係数 K_x のプロファイルは、乱流鉛直速度スケール w_x 、及び無次元鉛直形状関数 $G(\sigma)$ の関数の積で書き表す。厚い混合層ほど乱流渦による効果的な混合があるので、 K_x は h に比例する。

$$K_x(\sigma) = h w_x(\sigma) G(\sigma) \quad (8.69)$$

ここで、 $\sigma = d/h$ (深さ/混合層厚) は無次元鉛直座標である。 $G(\sigma)$ は三次多項式で近似される (O'Brien 1970)、すなわち、

$$G(\sigma) = a_0 + a_1 \sigma + a_2 \sigma^2 + a_3 \sigma^3 \quad (8.70)$$

第 8 章 混合層モデル

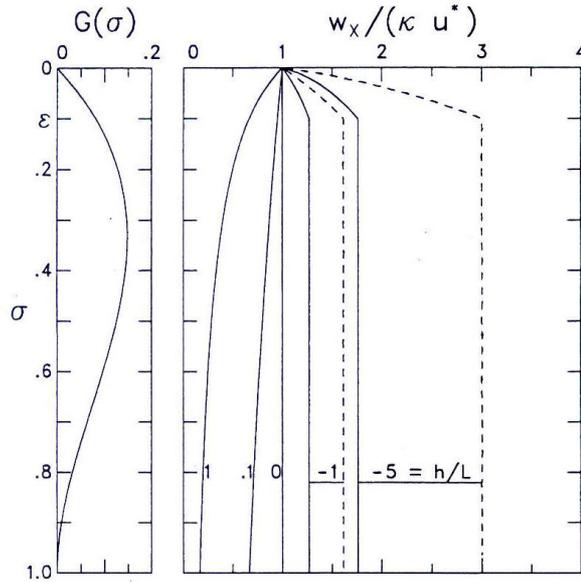


図 8.2: (左) $G(1) = \partial_\sigma G(1) = 0$ の場合の無次元形状関数 $G(\sigma)$ の鉛直プロファイル例。(右) $h/L = 1, 0.1, 0, -1, -5$ の場合の乱流速度スケール $w_x(\sigma)/(\kappa u^*)$ の鉛直プロファイル。不安定 ($h/L < 0$) の場合には、 $w_s(\sigma)$ (破線) は $w_m(\sigma)$ (実線) より大きい、安定 ($h/L \geq 0$) の場合には両者は等しい (本文参照)。Large et al.(1994) より転載。

とする。図 8.2 に $G(\sigma)$ と w_x の例を示す。

式 (8.70) において、乱流渦は海面 ($\sigma = 0$) を横切らないので、 $K_x = 0$ 、すなわち $a_0 = 0$ である。

表層 ($\sigma < \varepsilon [= 0.1]$) では、Monin-Obukhov の相似則が適用されるので、式 (8.64 [$\gamma_x = 0$])、(8.68) 及び (8.69) より、

$$w_x(\sigma)(a_1 + a_2\sigma) = \frac{\kappa u^* \langle w_x(d) \rangle}{\phi_x(\zeta) \langle w_{x0} \rangle} \quad (8.71)$$

となる。ここで、乱流フラックス $\langle w_x \rangle$ が線形であると仮定する (Lumley and Panofski 1964; Tennekes 1973) と、式 (8.71) は、

$$w_x(\sigma) = \frac{\kappa u^*}{\phi_x(\zeta)} \quad (8.72)$$

であれば成立する。不安定条件下 ($\zeta (= d/L) < 0$) において、表層以深では $\sigma = \varepsilon (\sim 0.1)$ の値で一定と仮定して

$$\begin{aligned} w_x(\sigma) &= \frac{\kappa u^*}{\phi_x(\varepsilon h/L)} & \varepsilon < \sigma < 1 \quad \zeta < 0 \\ w_x(\sigma) &= \frac{\kappa u^*}{\phi_x(\sigma h/L)} & \text{otherwise} \end{aligned} \quad (8.73)$$

とし、 w_x が大きくなりすぎるのを防ぐ (図 8.2)。

普遍関数 ϕ_x は、安定度パラメータ $\zeta (= d/L)$ の関数として各種実験データから決められるが、乱流鉛直速度スケールが中立安定の場合 ($h/L = 0$) には、 κu^* でスケールされるように、不安定の場合 ($h/L < 0$) の場合には、それより強く、安定の場合 ($h/L \geq 0$) の場合には、それより弱くなるようにする。Large et al.(1994) では以下のように決めている (図 8.3)。

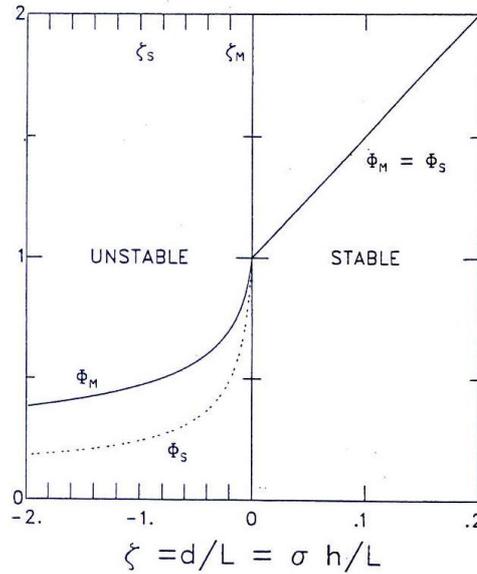


図 8.3: 安定度パラメータ ζ の関数として表した無次元普遍関数 ϕ_x のプロファイル。Large et al.(1994) より転載。

$$\begin{aligned}
 \phi_m &= \phi_s = 1 + 5\zeta & 0 \leq \zeta \\
 \phi_m &= (1 - 16\zeta)^{-1/4} & \zeta_m \leq \zeta < 0 \\
 \phi_m &= (a_m - c_m\zeta)^{-1/3} & \zeta < \zeta_m \\
 \phi_s &= (1 - 16\zeta)^{-1/2} & \zeta_s \leq \zeta < 0 \\
 \phi_s &= (a_s - c_s\zeta)^{-1/3} & \zeta < \zeta_s
 \end{aligned} \tag{8.74}$$

ここで、 $(\zeta_s, c_s, a_s, \zeta_m, c_m, a_m) = (-1.0, 98.96, -28.86, -0.2, 8.38, 1.26)$ である。

明記すべき特徴をいくつか列挙する。不安定の場合 ($h/L < 0$) には、スカラー量に対する $w_s(\sigma)$ は $w_m(\sigma)$ より大きいが、安定 ($h/L \geq 0$) の場合には両者は等しい。不安定の度合いが強い場合 ($\zeta < \zeta_x$)、鉛直運動が卓越するので、 w_s は w^* のオーダーの量を持つことになるように ϕ_x を決めている。つまり、

$$\phi_x = (a_x - c_x\zeta)^{-1/3} \quad \zeta < \zeta_x < 0 \tag{8.75}$$

に、(8.67)、(8.73)、および、対流不安定がおきている場合に混合層内で成立する、

$$w^* = (-B_f h)^{1/3} \tag{8.76}$$

を利用すると、

$$\begin{aligned}
 w_x &= \kappa(a_x u^{*3} + c_x \kappa \sigma w^{*3})^{1/3} \rightarrow \kappa(c_x \kappa \sigma)^{1/3} w^* & \sigma < \varepsilon \\
 w_x &= \kappa(a_x u^{*3} + c_x \kappa \varepsilon w^{*3})^{1/3} \rightarrow \kappa(c_x \kappa \varepsilon)^{1/3} w^* & \varepsilon \leq \sigma < 1
 \end{aligned} \tag{8.77}$$

となる。ここで \rightarrow は、対流不安定がおきているときの極限を示す。

乱流フラックス $\langle w_x \rangle$ の線形仮定 (フラックスは海面の値から線形関数で減少する) より、式 (8.71) は、

$$\langle w_x(\sigma) \rangle / \langle w_x0 \rangle = 1 - \beta_r \sigma / \varepsilon = a_1 + a_2 \sigma \tag{8.78}$$

$\sigma = 0$ における (8.70) とその微分から、 $a_1 = 1, a_2 = -\beta_r / \varepsilon$ 。 $\sigma = 1$ での条件 $G(1) = \partial_\sigma G(1) = 0$ と、仮定 $\varepsilon = 0.1$ から、 $a_2 = -2, a_3 = 1, \beta_r = 0.2$ となる。

第 8 章 混合層モデル

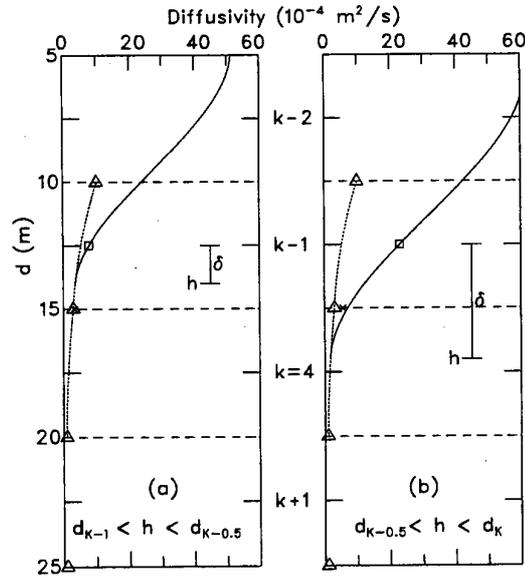


図 8.4: 混合層基底 (深さ h) と内部領域における鉛直拡散係数を結合させる概念図。 h が、 $d_{k-1} < h < d_k$ の場合、 $d_{k-\frac{1}{2}}$ における鉛直粘性拡散係数は \times 印のものとなる。 Large et al.(1994) より転載。

8.3.4 混合層基底での鉛直粘性拡散係数

KPP スキームでは、前節とは別に混合層以深で粘性拡散係数 v_x を決めておき (MRI.COM では、混合層以深で Tsujino et al.(2000) の背景粘性拡散係数を適用)、混合層基底でつなく。離散的鉛直グリッドの場合、混合層が実際より浅く見積もられるため、混合層の発達が抑制される。そこで、混合層基底でのグリッド (深さ $d_{k-\frac{1}{2}}$) で、以下の式により、係数を大きくする操作をしている (図 8.4)。

$$\begin{aligned} \delta &= (h - d_{k-1}) / (d_k - d_{k-1}) \\ K_x^* &= (1 - \delta)^2 K_x(d_{k-1}) + \delta^2 K_x(d_{k-\frac{1}{2}}) \\ \Lambda_x &= (1 - \delta) v_x(d_{k-\frac{1}{2}}) + \delta K_x^* \end{aligned} \quad (8.79)$$

図 8.4 では、内部領域の鉛直粘性拡散係数 v_x が破線で表され、三角印の深度で定義される。一方、境界層内の拡散係数プロファイル $K_x(d)$ は、実線で示され、四角印の深度で定義される。モデルにおいて、境界層基底 (h) と内部領域の境界にあたる深度 (深さ $d_{k-\frac{1}{2}}$) の鉛直粘性拡散係数には Λ_x を適用する。 K_x^* は、境界深度において大きな鉛直粘性拡散係数を作成するための係数で、 h が d_{k-1} より深くなったら直ぐに大きくなるように調整されている。なお、 $d_{k-1} < h < d_{k-\frac{1}{2}}$ の時 ($d_{k-\frac{1}{2}}$ より混合層が浅いとき)、(8.79) の 2 式目における、 $K_x(d_{k-\frac{1}{2}})$ は定義されないので、内部領域の値、 $v_x(d_{k-\frac{1}{2}})$ に置き換えられる。

8.3.5 混合層厚

混合層厚 h は、浮力 $B(d)$ と速度 $\vec{V}(d)$ の鉛直プロファイルによって決める。ここでは、海面を基準としたバルクリチャードソン数

$$Ri_b(d) = \frac{(B_r - B(d))d}{|\vec{V}_r - \vec{V}(d)|^2 + V_t^2(d)} \quad (8.80)$$

が基準値 Ri_c (MRI.COM では 0.3) と等しくなる深度とする。ここで、 B_r と \vec{V}_r は第 1 層における浮力と速度である。また、 V_t^2/d は乱流速度シアと呼ばれ、平均シアが弱いときに重要となる。

式 (8.80) で $d = h$ とすると、

$$Ri_c = \frac{(B_r - B(h))h}{|\vec{V}_r - \vec{V}(h)|^2 + V_t^2(h)} \quad (8.81)$$

となるが、純粋に重力不安定による対流だけが起きていて、シアがなく ($|\vec{V}_r - \vec{V}(h)| = 0$)、混合層内の水はよくかき混ぜられ、浮力が B_r 、この水が浮力振動数 N ($N^2 = \partial B / \partial z$) の領域を侵食していく状況 (図 8.5) を考えると、 $(B_r - B(h)) = (h - h_e)N^2$ となるが、 $(h - h_e)$ を消去するために、(8.64)、(8.69)、(8.76)、(8.77) を用いるが、この際に $\gamma_b \ll N^2$ 、 $G(h_e/h) = (h - h_e)^2/h^2$ 、及び $N(h_e) = N/C_v$ 、 $C_v = 1.8$ を用い、さらに、対流不安定時 (図 8.5) に $d = h_e$ において、経験的に成り立つ、 $\langle wb_e \rangle / \langle wb_0 \rangle = -\beta_T (= -0.2)$ 、 $\langle wb_0 \rangle \equiv -B_f$ を用いると、

$$V_t^2(d) = \frac{C_v(-\beta_T)^{1/2}}{Ri_c \kappa^{2/3}} (c_s \varepsilon)^{-1/6} h N w_* \quad (8.82)$$

となる。ここに現れた w^* を (8.77) を用いて、スカラーに対する乱流鉛直流速 (w_s) に置き換えると、

$$V_t^2(d) = \frac{C_v(-\beta_T)^{1/2}}{Ri_c \kappa^2} (c_s \varepsilon)^{-1/2} d N w_s \quad (8.83)$$

となる。式 (8.80) に V_t^2 がないと、混合層基底で N が大きい場合に混合層厚 h が小さくなる。従って拡散係数 K_x が小さくなるため、 N が大きくてもエントレインメントフラックス自体が小さくなってしまう。一方、 V_t^2 があると、式 (8.83) より N が大きければ混合層厚 h が比較的厚くなる。従って拡散 K_x が大きくなり、エントレインメントフラックスを維持できる。

8.3.6 Nonlocal 輸送

図 8.5 は、海洋境界層において浮力と浮力フラックスの期待されるプロファイルを描いたものである。例えば、成層が local に安定または中立であるところ ($0.35 < d/h < 0.8$) では、式 (8.64 [$\gamma_x = 0$]) では乱流浮力フラックス $\langle wb \rangle$ は下向き (< 0) またはゼロとなるはずである。しかし、図 8.5 に示されるように、(nonlocal な) 海面浮力フラックス $\langle wb_0 \rangle$ が不安定な場合 (> 0) に、上向き乱流フラックス $\langle wb \rangle$ が存在する。このように、local な成層が安定または中立であっても浮力が上向きに輸送される現象を nonlocal 輸送 (または counter gradient 輸送) と呼ぶ。

境界層では基本的に乱流が nonlocal であるという特徴があり、local な浮力フラックスが、local な勾配に加えて海面フラックス $\langle wb \rangle$ や境界層厚 h などの境界層パラメータに依存する。また、Nonlocal 輸送は不安定強制の時のスカラー量に対してのみ値をもつ (Deardroff 1972)。ここでは、Mailhôt and Benoit (1982) のパラメータ化を用いて、不安定強制下におけるスカラー量に対する nonlocal 輸送 γ_s を、

$$\gamma_s = C^* \frac{\langle w s_0 \rangle}{w^* h} \quad (8.84)$$

を用いて計算する。ここで、 $C^* = 10$ である。強制の種類と条件に応じて書き直すと

$$\begin{aligned} \gamma_x &= 0 & \zeta &\geq 0 \\ \gamma_m &= 0 & \zeta &< 0 \\ \gamma_s &= C_s \frac{\langle w s_0 \rangle}{w_s(\sigma) h} & \zeta &< 0 \\ \gamma_\theta &= C_s \frac{\langle w \theta_0 \rangle + \langle w \theta_R \rangle}{w_s(\sigma) h} & \zeta &< 0 \end{aligned} \quad (8.85)$$

となる。ここで、

$$C_s = C^* \kappa (c_s \kappa \varepsilon)^{1/3} \quad (8.86)$$

第 8 章 混合層モデル

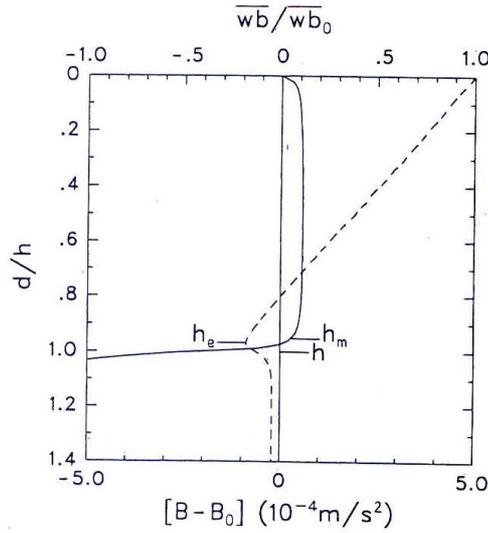


図 8.5: 海洋境界層において期待される浮力 (実線) と海面フラックス ($\langle wb_0 \rangle$) でスケーリングした浮力フラックス (破線) の鉛直プロファイル。Large et al.(1994) より転載。

である。また、 $\langle w\theta_R \rangle$ は、nonlocal 輸送に対する短波入射の寄与を表したもので、 I を海洋内部における短波の熱フラックス分布 (第 9 章を参照) とすると、

$$-\langle w\theta_R \rangle = [(I/\rho C_p)_0 - (I/\rho C_p)_{h_\gamma}] \quad (8.87)$$

と表すことができる。ここで、 C_p は海水の比熱、 h_γ は、nonlocal 輸送を求める深さである。

References

Deardroff, J. W., 1972: Theoretical expression for the countergradient vertical heat flux, *J. Geophys. Res.*, **77**, 5900-5904.

Kantha, L. H., and C. A. Clayson, 2000: *Small Scale Processes in geophysical Fluid Flows*, Academic Press, 888pp.

Large, W. G., J. C. McWilliams, and S. C. Doney, 1994: Oceanic vertical mixing: a review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization, *Rev. Geophys.*, **32**, 363-403.

Lumley, J. A., and H. A. Panofsky, 1964: *The structure of the atmospheric turbulence*, 239pp., John Wiley, New York.

Mailhôt, J., and R. Benoit, 1982: A finite-element model of the atmospheric boundary layer suitable for use with numerical weather prediction models, *J. Atmos. Sci.*, **39**, 2249-2266.

Mellor, G. L., and T. Yamada, 1982: Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **20**, 851-875.

8.3. K Profile Parameterization (KPP)

- Noh, Y., and H.-J. Kim, 1999: Simulations of temperature and turbulence structure of the oceanic boundary layer with the improved near-surface process, *J. Geophys. Res.*, **104**, 15,621-15,634.
- O'Brien, J. J., 1970: A note on the vertical structure of the eddy exchange coefficient in the planetary boundary layer, *J. Atmos. Sci.*, **27**, 1213-1215.
- Rotta, J. C., 1951a: Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, *Z. Phys.*, **129**, 547-572.
- Rotta, J. C., 1951b: Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, *Z. Phys.*, **131**, 51-77.
- Tennekes, H., 1973: A model for the dynamics of the inversion above a convective boundary layer, *J. Atmos. Sci.*, **30**, 558-567.
- Treon, I. B., and L. Mahrt, 1986: A simple model of the atmospheric boundary layer; sensitivity to surface evaporation, *Boundary Layer Meteorol.*, **37**, 129-148.
- Tsujino, H., H. Hasumi, and N. Sugimoto, 2000: Deep Pacific circulation controlled by vertical diffusivity at the lower thermocline depth, *J. Phys. Oceanogr.*, **30**, 2853-2865.

