

第7章 水温・塩分方程式

本章では水温・塩分の予報の手続きのうち、海面過程(混合層および海面フラックス)を除く基本部分の定式化を行なう。最初の節でフラックス形式の差分化について説明し、続く各節でフラックスの各成分(拡散および移流)の定式化について述べる。移流については、冗長になるのを避けるため本章では QUICK について述べ、UTOPIA と QUICKEST については付録で説明する。最後の節では対流調節について説明する。

7.1 フラックス形式

水温・塩分の時間変化を支配する方程式(微分形)は、第1章の(1.26)–(1.38)式に記述されている。(1.26)、(1.27)式を差分化するには、各格子境界からのフラックスを計算し、それらの収束・発散をその格子の時間変化とする(図7.1)。つまり差分式は

$$\begin{aligned}
 T_{i,j,k}^{n+1}V_{i,j,k}^{n+1} = & T_{i,j,k}^{n-1}V_{i,j,k}^{n-1} \\
 + 2\Delta t \{ & FX_{i-\frac{1}{2},j,k} - FX_{i+\frac{1}{2},j,k} \\
 & + FY_{i,j-\frac{1}{2},k} - FY_{i,j+\frac{1}{2},k} \\
 & + FZ_{i,j,k+\frac{1}{2}} - FZ_{i,j,k-\frac{1}{2}} \}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

のように書く。ここに、 T は水温または塩分、 V は格子体積、 FX, FY, FZ は(フラックス)×(格子境界面積)である。フラックスには移流と拡散とからの寄与が含まれる。自由表面の場合、 $k=1$ の V は時間変化する。

格子体積は

$$\begin{aligned}
 V_{i,j,k} = & SZSW_{i,j}\Delta z_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + SZSE_{i,j}\Delta z_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \\
 + & SZNW_{i,j}\Delta z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + SZNE_{i,j}\Delta z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

と書ける。ここに、 Δz は対応する流速格子の(自由表面の昇降も考慮した)鉛直方向のサイズである。また $SZSW$ は、U-box の境界で区切られる T-box の四つの部分のうち左下(地理座標の場合南西)の水平面積である。同様に $SZSE$ は右下(南東)、 $SZNW$ は左上(北西)、 $SZNE$ は右上(北東)の部分の面積である。

7.2 移流

水温・塩分の移流の計算スキームとして、コンパイルオプションによって水平移流は QUICK と UTOPIA、鉛直移流は QUICK と QUICKEST からそれぞれ選択することができる(QUICK と QUICKEST および両者の比較については Leonard (1979) を参照されたい。QUICKEST から UTOPIA への拡張については Leonard et al. (1993) に詳しい。UTOPIA の計算法は Leonard et al. (1994) を参考にした)。ここでは QUICK について説明する。UTOPIA、QUICKEST は Appendix で説明する。

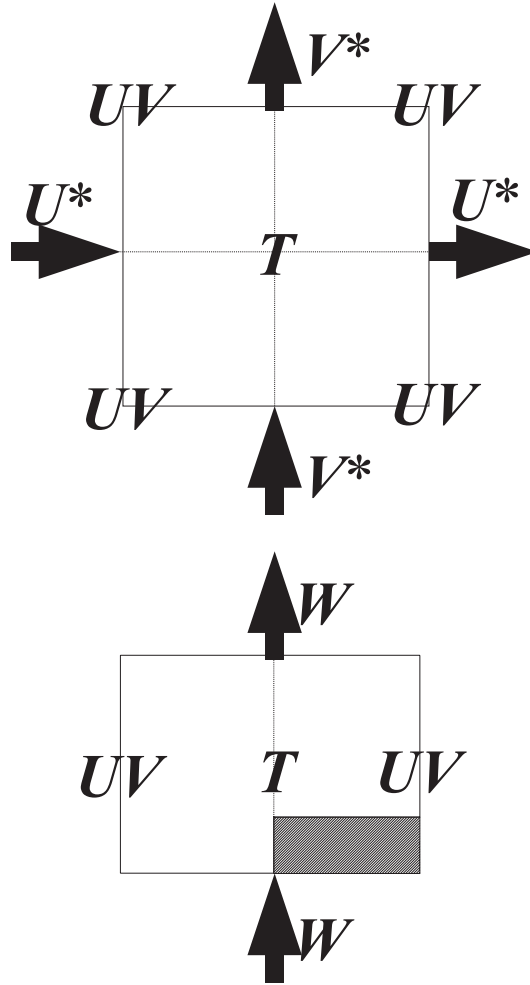


図 7.1: TS-Box のまわりの格子点配置 (上:上から見たところ、下:横から見たところ); 矢印に相当するフラックスを計算する。

フラックスへの移流の寄与は、

$$FXA_{i+\frac{1}{2},j,k} = U_{i+\frac{1}{2},j,k}^T T_{i+\frac{1}{2},j,k} \quad (7.3)$$

$$FYA_{i,j+\frac{1}{2},k} = V_{i,j+\frac{1}{2},k}^T T_{i,j+\frac{1}{2},k} \quad (7.4)$$

$$FZA_{i,j,k+\frac{1}{2}} = W_{i,j,k+\frac{1}{2}}^T T_{i,j,k+\frac{1}{2}} \quad (7.5)$$

と書ける。ここに、流量 U^T, V^T は (3.2)–(3.7) の定義により

$$U_{i+\frac{1}{2},j,k}^T = \frac{1}{2}\Delta y_{i+\frac{1}{2},j} \left(u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}\Delta z_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}\Delta z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right) \quad (7.6)$$

$$V_{i,j+\frac{1}{2},k}^T = \frac{1}{2}\Delta x_{i,j+\frac{1}{2}} \left(v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}\Delta z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}\Delta z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right) \quad (7.7)$$

となり、連続式 (3.1) を診断的に解くことにより w^T が求まる。さらに QUICKEST を使う場合に必要な鉛直速度 w は次式で求める (QUICKEST を使わないとき、 w は不要)。

$$W_{i,j,k+\frac{1}{2}}^T = w_{i,j,k+\frac{1}{2}} SZ_{i,j,k+\frac{1}{2}} \quad (7.8)$$

ただし、

$$SZ_{i,j,k+\frac{1}{2}} = SZSW_{i,j} \times L_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + SZSE_{i,j} \times L_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + SZNW_{i,j} \times L_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + SZNE_{i,j} \times L_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \quad (7.9)$$

とした。 L は対応する流速点に海水があれば1、なければ0であるような配列である。

この表現は移流スキームのオプションによらない。違うのは、水温・塩分の格子境界での値 $T_{i+\frac{1}{2},j,k}$, $T_{i,j+\frac{1}{2},k}$, $T_{i,j,k+\frac{1}{2}}$ の決めかたである。中央差分は隣接する2点の水温・塩分値の算術平均を格子境界の値として用いる方法で、QUICKは上流側にもう一点加えた3点の値を2次関数で補間して(図7.2)格子境界の値を決める方法である。

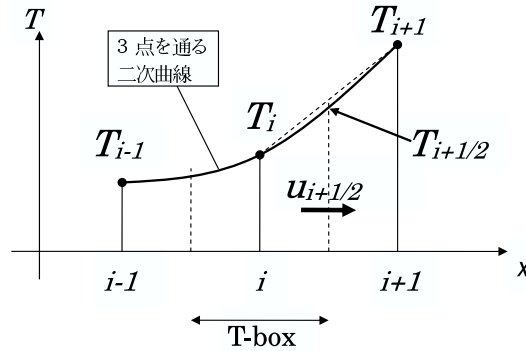


図 7.2: 補間の概念図: T_i が現在計算している T-Box の水温の代表値であり、 $T_{i+\frac{1}{2}}$ が格子境界の値である。QUICK では T_i と両隣の T-Box の値 T_{i-1}, T_{i+1} との間を 2 次曲線で補間して $T_{i+\frac{1}{2}}$ を求める。

本来の QUICK による格子境界の値は

$$T_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{\Delta x_i T_{i+1,j,k} + \Delta x_{i+1} T_{i,j,k}}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} - \frac{\Delta x_{i+1} \Delta x_i}{4} c_{i+\frac{1}{2},j,k} \quad (7.10)$$

$$T_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{\Delta y_j T_{i,j+1,k} + \Delta y_{j+1} T_{i,j,k}}{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j} - \frac{\Delta y_{j+1} \Delta y_j}{4} d_{i,j+\frac{1}{2},k} \quad (7.11)$$

$$T_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{T_{i,j,k+\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta z_{i,j,k+\frac{1}{2}}^2}{4} e_{i,j,k+\frac{1}{2}} \quad (7.12)$$

となり、 c, d, e はフラックスの向きによって以下のように定義される。

$$U_{i+\frac{1}{2},j,k}^T > 0 \text{ のとき } c_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{\Delta x_i \delta_x \delta_x T_{i,j,k}}{2 \Delta x_i^x} \quad (7.13)$$

$$U_{i+\frac{1}{2},j,k}^T < 0 \text{ のとき } c_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{\Delta x_{i+1} \delta_x \delta_x T_{i+1,j,k}}{2 \Delta x_{i+1}^x} \quad (7.14)$$

$$V_{i,j+\frac{1}{2},k}^T > 0 \text{ のとき } d_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{\Delta y_j \delta_y \delta_y T_{i,j,k}}{2 \Delta y_j^y} \quad (7.15)$$

$$V_{i,j+\frac{1}{2},k}^T < 0 \text{ のとき } d_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{\Delta y_{j+1} \delta_y \delta_y T_{i,j+1,k}}{2 \Delta y_{j+1}^y} \quad (7.16)$$

$$W_{i,j,k+\frac{1}{2}}^T > 0 \text{ のとき } e_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta z_{k+1} \delta_z \delta_z T_{i,j,k+1}}{2 \Delta z_{i,j,k+1}^z} \quad (7.17)$$

$$W_{i,j,k+\frac{1}{2}}^T < 0 \text{ のとき } e_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta z_k \delta_z \delta_z T_{i,j,k}}{2 \Delta z_{i,j,k}^z} \quad (7.18)$$

第7章 水温・塩分方程式

差分オペレータの定義は以下のとおり (y, z についても同様である)。

$$\begin{aligned}\delta_x A_i &\equiv \frac{A_{i+\frac{1}{2}} - A_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i}, & \delta_x A_{i+\frac{1}{2}} &\equiv \frac{A_{i+1} - A_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}, \\ \overline{A_i^x} &\equiv \frac{A_{i+\frac{1}{2}} + A_{i-\frac{1}{2}}}{2}, & \overline{A_{i+\frac{1}{2}}^x} &\equiv \frac{A_{i+1} + A_i}{2}\end{aligned}\quad (7.19)$$

いま、 c, d, e の格子境界の流速が正のときの値を c_p, d_p, e_p 、流速が負のときの値を c_m, d_m, e_m と書き、

$$c_a = c_m + c_p \quad (7.20)$$

$$c_d = c_m - c_p \quad (7.21)$$

$$d_a = d_m + d_p \quad (7.22)$$

$$d_d = d_m - d_p \quad (7.23)$$

$$e_a = e_m + e_p \quad (7.24)$$

$$e_d = e_m - e_p \quad (7.25)$$

とおけば、

$$\begin{aligned}FXA_{i+\frac{1}{2},j,k} &= U_{i+\frac{1}{2},j,k}^T \left[\frac{\Delta x_{i,j,k} T_{i+1,j,k} + \Delta x_{i+1,j,k} T_{i,j,k}}{\Delta x_{i+1,j,k} + \Delta x_{i,j,k}} - \frac{\Delta x_{i+1,j,k} \Delta x_{i,j,k}}{8} c_{ai+\frac{1}{2},j,k} \right] \\ &+ |U_{i+\frac{1}{2},j,k}^T| \frac{\Delta x_{i+1} \Delta x_i}{8} c_{di+\frac{1}{2},j,k}\end{aligned}\quad (7.26)$$

$$\begin{aligned}FYA_{i,j+\frac{1}{2},k} &= V_{i,j+\frac{1}{2},k}^T \left[\frac{\Delta y_{i,j,k} T_{i,j+1,k} + \Delta y_{i,j+1,k} T_{i,j,k}}{\Delta y_{i,j+1,k} + \Delta y_{i,j,k}} - \frac{\Delta y_{i,j+1,k} \Delta y_{i,j,k}}{8} d_{ai,j+\frac{1}{2},k} \right] \\ &+ |V_{i,j+\frac{1}{2},k}^T| \frac{\Delta y_{i,j+1,k} \Delta y_{i,j,k}}{8} d_{di,j+\frac{1}{2},k}\end{aligned}\quad (7.27)$$

$$\begin{aligned}FZA_{i,j,k+\frac{1}{2}} &= W_{i,j,k+\frac{1}{2}}^T \left[\frac{\Delta z_{i,j,k} T_{i,j,k+1} + \Delta z_{i,j,k+1} T_{i,j,k}}{\Delta z_{i,j,k+1} + \Delta z_{i,j,k}} - \frac{\Delta z_{i,j,k+1} \Delta z_{i,j,k}}{8} e_{ai,j,k+\frac{1}{2}} \right] \\ &+ |W_{i,j,k+\frac{1}{2}}^T| \frac{\Delta z_{i,j,k+1} \Delta z_{i,j,k}}{8} e_{di,j,k+\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (7.28)$$

となる。(7.26) は、

$$FXA_{i+\frac{1}{2},j,k} \simeq U_{i+\frac{1}{2},j,k}^T \tilde{T}_{i+\frac{1}{2},j,k} + A_Q \frac{\partial^3 T_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial x^3} \quad (7.29)$$

と書きなおせる。 $\tilde{T}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ は 3 次の多項式で補間した格子境界での T の値で、

$$A_Q = |U_{i+\frac{1}{2},j,k}^T| \frac{\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta x_i}{8} \quad (7.30)$$

とした。

移流の計算は時間的には leap-frog で行なうが、(7.29) の右辺第 2 項は biharmonic な拡散の形をしているので計算の安定のために前方差分で計算する (Holland et al. 1998)。

$u_{i+\frac{1}{2},j,k}^* > 0$ のとき $i-1, j, k$ が ($u_{i+\frac{1}{2},j,k}^* < 0$ のとき $i+1, j, k$ が) 陸あるいは海底下である場合には重みつき上流差分を用いる。

南北・鉛直方向についても同様にする。

7.3 拡散

拡散については、Laplacian 型水平拡散 (既定値)、biharmonic 型水平拡散 (オプション BIHARMONIC)、等密度面拡散 (オプション ISOPYCNAL)、のいずれかと、Laplacian 型鉛直拡散とを用いることができる。

等密度面拡散の場合は、係数の設定によって Gent and McWilliams (1990) のパラメタリゼーション (GM スキーム) を用いることができる。

biharmonic 型水平拡散は Laplacian 型に比べて水平スケールに対する選択性が高く、格子サイズに比べて大きなスケールの擾乱を不必要に抑えることが少ないため、渦を陽に表現するような高解像度モデルに向く。一方、渦を陽に表現できない中・低解像度モデルでは biharmonic 型水平拡散は不安定である。

Laplacian 型水平拡散では、等密度面が傾いていても水平方向に混合を起こすため、現実にはあり得ない大きな等密度面間 (diapycnal) 混合が生じる。等密度面拡散を用いることで、偽の等密度面間混合を抑えることができる。GM スキームも等密度面上の輸送を表現するものであるが、傾圧不安定擾乱による輸送をパラメータ化したものとされる。中・低解像度モデルでは GM スキームを用いるのが一般的である。

7.3.1 Laplacian 型水平拡散

Laplacian 型水平拡散は、拡散によるフラックスが水温・塩分の勾配に比例するものである。フラックスの差分式は、

$$FXD_{i+\frac{1}{2},j,k} = -\kappa_H \Delta y_{i+\frac{1}{2},j} \overline{\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k}}^y \delta_x T_{i+\frac{1}{2},j,k} \quad (7.31)$$

$$FYD_{i,j+\frac{1}{2},k} = -\kappa_H \Delta x_{i,j+\frac{1}{2}} \overline{\Delta z_{i,j+\frac{1}{2},k}}^x \delta_y T_{i,j+\frac{1}{2},k} \quad (7.32)$$

となる。ここに

$$\delta_x T_{i+\frac{1}{2},j,k} \equiv \frac{T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} \quad (7.33)$$

$$\delta_y T_{i,j+\frac{1}{2},k} \equiv \frac{T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} \quad (7.34)$$

とした。

7.3.2 biharmonic 型水平拡散

biharmonic 型水平拡散は、拡散によるフラックスが水温・塩分の Laplacian の勾配に比例するものである。フラックスの差分式は、

$$FXD_{i+\frac{1}{2},j,k} = \kappa_b \Delta y_{i+\frac{1}{2},j} \overline{\Delta z_{i+\frac{1}{2},j,k}}^y \delta_x \nabla^2 T_{i+\frac{1}{2},j,k} \quad (7.35)$$

$$FYD_{i,j+\frac{1}{2},k} = \kappa_b \Delta x_{i,j+\frac{1}{2}} \overline{\Delta z_{i,j+\frac{1}{2},k}}^x \delta_y \nabla^2 T_{i,j+\frac{1}{2},k} \quad (7.36)$$

となる。ここに、

$$\nabla^2 T_{i,j,k} = \frac{\Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j}}{V_{i,j,k}} (\delta_x \overline{\Delta z_{i,j,k}}^y \delta_x T_{i,j,k} + \delta_y \overline{\Delta z_{i,j,k}}^x \delta_y T_{i,j,k}) \quad (7.37)$$

である。

7.3.3 鉛直拡散

鉛直拡散によるフラックスは水温・塩分の鉛直方向の勾配に比例する形で与えられる。鉛直拡散係数は 1 次元配列 `vdbg(1:km)` で与えられる鉛直分布を既定値とし (例えば Tsujino et al., 2000 で用いられているようなもの)、混合層モデルによって与えられる拡散係数や等密度面拡散の鉛直成分によっておきかえられる。

第7章 水温・塩分方程式

混合層モデルまたは等密度面拡散を用いる場合には拡散係数が大きくなる場所があるので、時間的には後方差分で解く。どちらも使わない場合には前方差分で解く。

差分式は、

$$FZD_{i,j,k+\frac{1}{2}} = -\kappa_z S Z_{i,j,k+\frac{1}{2}} \delta_z T_{i,j,k+\frac{1}{2}} \quad (7.38)$$

と書ける。ここに

$$\delta_z T_{i,j,k+\frac{1}{2}} \equiv \frac{T_{i,j,k} - T_{i,j,k+1}}{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}} \quad (7.39)$$

とした。簡単のため、勾配を計算するのに用いた格子間の距離 $\Delta z_{k+\frac{1}{2}}$ は、海底の格子の厚さの変化や、自由表面の昇降を考慮していない。

7.3.4 等密度面拡散

等密度面拡散は、拡散によるフラックスが、等密度面上で大きな拡散係数 κ_I 、等密度面に直交する方向で小さな拡散係数 κ_D と、それぞれの方向の水温・塩分の勾配との積で表されるものである。拡散テンソル \mathbf{K} を用いて、フラックスの各成分を $F^m(T) = -K^{mm} \partial_m T$ と書くと、

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa_I}{1+S^2} \begin{pmatrix} 1+S_y^2+\varepsilon S_x^2 & (\varepsilon-1)S_x S_y & (1-\varepsilon)S_x \\ (\varepsilon-1)S_x S_y & 1+S_x^2+\varepsilon S_y^2 & (1-\varepsilon)S_y \\ (1-\varepsilon)S_x & (1-\varepsilon)S_y & \varepsilon+S^2 \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

と書ける。ここに、

$$\mathbf{S} = (S_x, S_y, 0) = \left(-\frac{\partial \rho}{\partial x}, -\frac{\partial \rho}{\partial y}, 0 \right) \quad (7.41)$$

$$S = |\mathbf{S}| \quad (7.42)$$

$$\varepsilon = \frac{\kappa_D}{\kappa_I} \quad (7.43)$$

である (Redi 1982)。

差分化は Cox (1987) に従うが、等密度面の傾きが小さいとする近似は行なっていない。

フラックスの東西成分 $FXD_{i+\frac{1}{2},j,k}$ の計算に現われる水温・塩分の勾配の3成分は、

$$(\delta_x T)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \overline{\delta_x T_{i+\frac{1}{2},j,k}} \quad (7.44)$$

$$(\delta_y T)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \overline{\delta_y T_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{xy} \quad (7.45)$$

$$(\delta_z T)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \overline{\delta_z T_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{xz} \quad (7.46)$$

のように差分化する。南北成分については、

$$(\delta_x T)_{i,j+\frac{1}{2},k} = \overline{\delta_x T_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{xy} \quad (7.47)$$

$$(\delta_y T)_{i,j+\frac{1}{2},k} = \overline{\delta_y T_{i,j+\frac{1}{2},k}} \quad (7.48)$$

$$(\delta_z T)_{i,j+\frac{1}{2},k} = \overline{\delta_z T_{i,j+\frac{1}{2},k}}^{yz} \quad (7.49)$$

とし、鉛直成分については

$$(\delta_x T)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \overline{\delta_x T_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{xz} \quad (7.50)$$

$$(\delta_y T)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \overline{\delta_y T_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{yz} \quad (7.51)$$

$$(\delta_z T)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \overline{\delta_z T_{i,j,k+\frac{1}{2}}} \quad (7.52)$$

とする (図 7.3)。

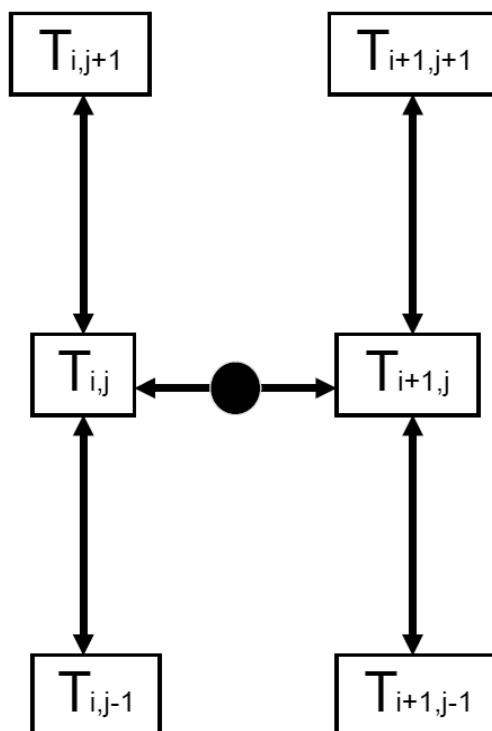


図 7.3: 等密度面拡散の計算で丸印 $(i + \frac{1}{2}, j, k)$ における勾配を求める方法:東西勾配は丸印を通る矢印、南北勾配は 4 本のたて方向の矢印での勾配を平均する。

拡散テンソルの成分の計算に用いる密度勾配は、前述の式の T を ρ で置き換えればよい。ただし、密度はフラックスの東西・南北成分についてはレベル k 基準、鉛直成分についてはレベル $k + \frac{1}{2}$ 基準で計算する。

また、等密度面の傾きが垂直に近くなり水平方向の拡散が小さくなると計算不安定が生じるので、等密度面の傾きには上限 S_{\max} を設ける。即ち、フラックスの各成分について $|S| > S_{\max}$ となった場合には $|S| = S_{\max}$ となるように $\partial_z \rho$ を置き換える。

7.3.5 Gent and McWilliams のパラメタリゼーション

Gent and McWilliams (1990) のパラメタリゼーションは、等密度面に沿って等密度層の厚さの勾配に比例するフラックスが存在するものとして、格子サイズ以下の擾乱による水温・塩分の輸送を表現するものである。前述の等密度面拡散では、等密度面と等温位面・等塩分面が一致する場合にはフラックスが生じないが、このパラメタリゼーションではそのような場合にもフラックスが生じ、等密度面の傾きを小さくしようとする働きをする。

いま、拡散によるフラックスの収束を、

$$R(T) = \partial_m (J^{mn} \partial_n T) \quad (7.53)$$

と書く。拡散テンソル J^{mn} は対称部分 $K^{mn} = (J^{mn} + J^{nm})/2$ と非対称部分 $A^{mn} = (J^{mn} - J^{nm})/2$ との和として

第7章 水温・塩分方程式

表現できる。前述の等密度面拡散は対称である。一方 A^{mn} によるフラックスの収束は、

$$\begin{aligned} R_A(T) &= \partial_m(A^{mn}\partial_n T) \\ &= \partial_m(A^{mn})\partial_n T \\ &= \partial_n(\partial_m A^{mn}T) \end{aligned} \quad (7.54)$$

となる ($A^{mn}\partial_m\partial_n T = 0, \partial_m\partial_n A^{mn} = 0$ を用いた)。 $u_*^n \equiv \partial_m A^{mn}$ とすれば、反対称テンソルによるフラックスは仮想的な流速 \mathbf{u}_* による移流ととらえることができる。

Gent and McWilliams のパラメタリゼーションは、

$$\mathbf{u}_* = -\frac{\partial}{\partial \rho}(\kappa_T \nabla_\rho h) / \frac{\partial h}{\partial \rho} \quad (7.55)$$

とするものであり (h は等密度面の高さ)、東西・南北・鉛直の各成分に分けると、

$$\mathbf{u}_* = \left(-\frac{\partial(\kappa_T S_x)}{\partial z}, -\frac{\partial(\kappa_T S_y)}{\partial z}, \nabla_h \cdot (\kappa_T \mathbf{S}) \right) \quad (7.56)$$

と書ける。これに対応するテンソル \mathbf{A} は一意には決まらないが、例えば

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\kappa_T S_x \\ 0 & 0 & -\kappa_T S_y \\ \kappa_T S_x & \kappa_T S_y & 0 \end{pmatrix} \quad (7.57)$$

と書くことができる。つまり、Gent and McWilliams のパラメタリゼーションは前述の等密度面拡散の拡散テンソルに \mathbf{A} を足すだけで実現される (Griffies 1998)。

7.3.6 等密度面拡散の差分化の問題点

ここでは Griffies et al (1998) が指摘している Cox (1987) の差分表現の問題点を MRI.COM の場合に即して簡単に説明する。この問題は MRI.COM では未解決であり、今後検討していく予定である。

今、塩分が一樣 ($\rho = \rho(T, P)$) で、 $\kappa_D = 0$ とし、南北方向の分布は考えないものとする、熱の拡散フラックスは

$$\begin{aligned} F^x(T) &= -\frac{\kappa_T}{1+S_x^2} \left[\partial_x T - \frac{\partial_x \rho}{\partial_z \rho} \partial_z T \right] \\ &= -\frac{\kappa_T}{1+S_x^2} \left[\partial_x T - \frac{\alpha \partial_x T}{\alpha \partial_z T} \partial_z T \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.58)$$

$$\begin{aligned} F^z(T) &= -\frac{\kappa_T}{1+S_x^2} S_x \left[\partial_x T - \frac{\partial_x \rho}{\partial_z \rho} \partial_z T \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.59)$$

となり ($\alpha \equiv \partial \rho / \partial T$)、(定義からも明らかのように) 等密度面拡散によるフラックスは生じない。しかし、前述の差分表現で (7.58) の [] 内は、

$$\delta_x T_{i+\frac{1}{2},k} - \frac{\delta_x \rho_{i+\frac{1}{2},k}}{\delta_z \rho_{i+\frac{1}{2},k}} \frac{\delta_z T_{i+\frac{1}{2},k}}{\delta_z T_{i+\frac{1}{2},k}} \quad (7.60)$$

となり、 ρ は $k-1, k, k+1$ の各レベルの T を用いてレベル k 基準で計算するので、状態方程式が線型でない限りゼロにならない。レベルの厚さが深いほど厚くなっており、成層が安定で α が水温が高いほど大きい場合、このような差分表現は等密度面の傾きを等温面の傾きよりも大きく評価してしまう可能性が高い。図 7.4 の破線のような水温分布で、等密度面を実線のように計算してしまうと、A では高温化、B では低温化の傾向となるので、このような分布は (不適切な) 等密度面拡散に対して不安定である。

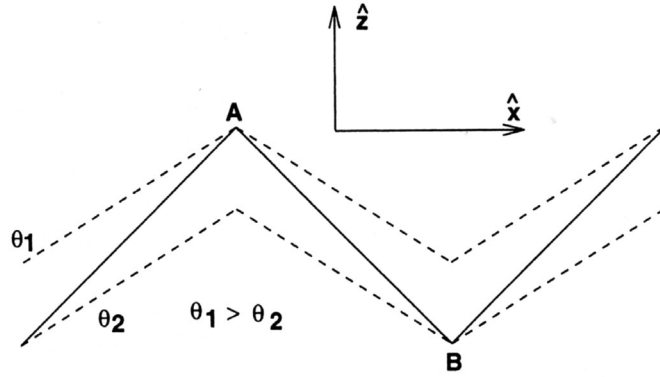


図 7.4: 等密度面の傾きが正しく計算されていないときに不安定な分布 (Griffies et al. 1998) より転載)。破線は等温線で、密度が水温のみに依存する場合にはこの線が中立となる。実線は Cox(1987) の方法で計算される中立な方向によって決まる線の一例である。密度が水温・塩分の関数の場合、破線は現場密度の等値線である。いずれの場合も破線と実線は平行になるべきである。Cox(1987) の方法では必ずしも平行にならない。

一方、状態方程式が線型であっても、東西方向の格子点間隔が一樣な場合、波長が格子点間隔の 2 倍に一致するような水温の東西分布を与えると、考えている格子点の東西両隣の水温・塩分は等しいから、フラックスの鉛直成分を計算するときに出てくる水温の東西勾配はゼロになってしまう。これは本来は東西勾配と相殺するはずのものである、非現実的なフラックスが生じることになる。

このような問題を回避するため Griffies et al. (1998) は以下のような新しい差分表現を開発した。東西方向のフラックスは等密度面の傾きが小さいとき、

$$F^x(T) = \frac{\kappa_I}{4\Delta z_k} \sum_{r=0}^1 \Delta z_{k+\frac{1}{2}+r} \sum_{p=0}^1 \left(\delta_x T_{i,k} + S_{xi,k|i+p,k+\frac{1}{2}+r}^{(i+p,k)} \delta_z T_{i+p,k+\frac{1}{2}+r} \right) \quad (7.61)$$

とする。ここに、

$$S_{xi2,k2|i3,k3}^{(i1,k1)} = - \frac{\delta_x \rho_{i2,k2}^{(i1,k1)}}{\delta_z \rho_{i3,k3}^{(i1,k1)}} \quad (7.62)$$

$$\delta_m \rho_{i2,k2}^{(i1,k1)} = (\rho_T)_{i1,k1} \delta_m T_{i2,k2} + (\rho_S)_{i1,k1} \delta_m S_{i2,k2} \quad (7.63)$$

である。つまり図 7.5 のような 3 つの格子点の組を 4 組考え、それぞれの角の格子点における密度の水温に関する変化率を用いて局所的に状態方程式を線形化してフラックスを計算して平均する。

鉛直方向は

$$F^z(T) = \frac{\kappa_I}{4\Delta x_i} \sum_{p=0}^1 \Delta x_{i-\frac{1}{2}+p} \sum_{r=0}^1 S_{xi-\frac{1}{2}+p,k-1+r|i,k+\frac{1}{2}}^{(i,k-1+r)} \left(S_{xi-\frac{1}{2}+p,k-1+r|i,k+\frac{1}{2}}^{(i,k-1+r)} \delta_z T_{i,k+\frac{1}{2}} + \delta_x T_{i-\frac{1}{2}+p,k-1+r} \right) \quad (7.64)$$

とする。

近似をしない 3 次元のフラックスの表現については Griffies et al. (1998) を参照されたい。

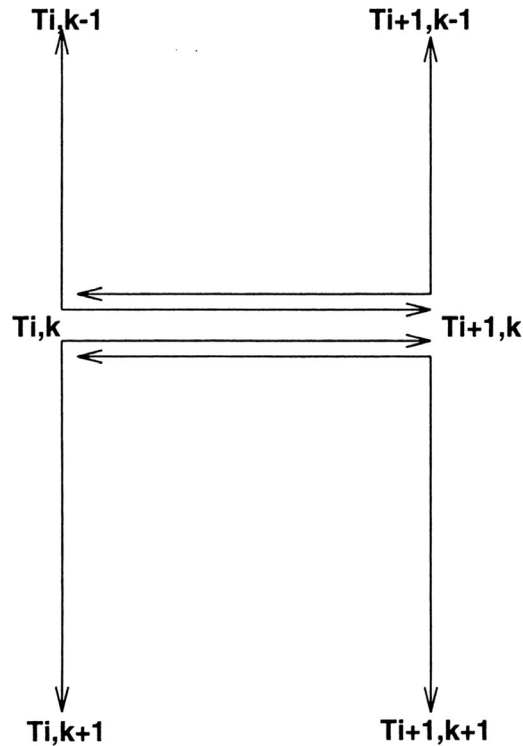


図 7.5: 等密度面拡散による東西方向のフラックスの計算に用いる格子点の配置 (Griffies et al. (1998) より転載)。3つの格子点の組が4組、折れ曲がった矢印で示されている。各々の参照点は角のT点 ($T_{i,k}, T_{i+1,k}$) である。フラックスはこの2点の間、T-Boxの境界面上で定義される。

7.4 対流調節

対流調節とは、水柱のある部分で密度の静的不安定（上側の密度が下側の密度より重い）が生じた時、その部分で内部的な対流が起こると見なし、その部分の密度（すなわち水温と塩分）を上下の平均値で置き換えること（中立化）である。これによって表される実際の現象としては、冬季の海面冷却によって混合層が発達する場合がほとんどで、その他、重い底層水がシルを越えて溢れ出し、斜面を下っていく場合などが対応する。また、数値計算誤差として生じる擾乱を消して滑らかな分布に戻すという実用的効果も含まれる。

一般に、対流調節の数値スキームとしては3種類ある。最も簡単なものは、上下2層ずつをペアとして調節を行い、次には1層違えて同じことを行う。これらの操作を何回か繰り返すことによって不安定な部分の密度を中立化していきこうとするものである。これは一回毎の操作は簡単であるが、有限の回数では完全な平均値に到らない場合が生じるという欠点を持つ。2番目の方法は、静的不安定が生じた二層間の鉛直拡散係数を大きな値に直して鉛直拡散の項だけを陰解法で解くというものである。この方法では1回の過程だけで完全に不安定を取り除くことはできないが、混合層や等密度面拡散などを含んで鉛直拡散係数が大きくなり陰解法を必要とする場合には、その中に含めて計算できるので、比較的計算効率性がよい。3番目の方法は、不安定な部分を中立化した後その上下端を改めて調べ、不安定が生じていると一旦中立化した部分を含めて新たに中立化し直すというもので、上下端での不安定がなくなるまでこれを繰り返す。この方法では、最大、鉛直層数-1回の繰り返しを要するが、完全に不安定部分を解消でき、“Complete Convection” と呼ばれる。MRI.COMのデフォルトでは、3番目の方法を採用しているので、以下にそれを述べる (Ishizaki, 1997)。

7.4.1 アルゴリズム

本スキームでは、密度不安定の判定以外はできるだけ判定過程 (if 文) を減らし機械的な演算でまかなおうとするため、水温、塩分、密度の鉛直列、 $T_k, S_k, R_k, (k = \frac{1}{2}, KM - \frac{1}{2})$ (KM は層数) 以外に、層の境界で 2 個の整数インデックス、 α_k, β_k 、および 6 個の実変数、 $TU_k, TL_k, SU_k, SL_k, VU_k, VL_k, (k = 1, KM - 1)$ を定義する (図 7.6 参照)。ここでは T-box・U-box の鉛直境界面のレベルを整数の k に対応させる (この表記法はこの節に限定し、この章の他の節では T-点・U-点のレベルが整数の k で示されることに注意)。 α_k は、水柱の内の不安定箇所を指示するもので、層 $k - \frac{1}{2}$ と $k + \frac{1}{2}$ の間で不安定であれば 1、中立的または安定であれば 0 である。一方、 β_k は今までに混ぜた部分の記録であり、混ぜて中立になっている境界で 1、それ以外で 0 を取る。配列 TU_k, SU_k, VU_k はレベル k より上の、また、配列 TL_k, SL_k, VL_k はレベル k より下の、 α を掛けながら積算した水温、塩分、体積であり、以下のような漸化式で表される。

$$\begin{aligned}
VU_1 &= \alpha_1 V_{\frac{1}{2}}, \\
VU_2 &= \alpha_2 (V_{1+\frac{1}{2}} + \alpha_1 V_{\frac{1}{2}}) = \alpha_2 (V_{1+\frac{1}{2}} + VU_1), \\
&\dots, \\
VU_k &= \alpha_k (V_{k-\frac{1}{2}} + VU_{k-1}), \\
&\dots, \\
VU_{KM-1} &= \alpha_{KM-1} (V_{KM-1-\frac{1}{2}} + VU_{KM-2}),
\end{aligned} \tag{7.65}$$

および

$$\begin{aligned}
VL_{KM-1} &= \alpha_{KM-1} V_{KM-\frac{1}{2}}, \\
VL_{KM-2} &= \alpha_{KM-2} (V_{KM-1-\frac{1}{2}} + \alpha_{KM-1} V_{KM-\frac{1}{2}}) = \alpha_{KM-2} (V_{KM-1-\frac{1}{2}} + VL_{KM-1}), \\
&\dots, \\
VL_k &= \alpha_k (V_{k+\frac{1}{2}} + VL_{k+1}), \\
&\dots, \\
VL_1 &= \alpha_1 (V_{1+\frac{1}{2}} + VL_2),
\end{aligned} \tag{7.66}$$

ここに、 $V_{k+\frac{1}{2}}$ はレベル $k + \frac{1}{2}$ のセルの体積を表す。同様に他の量も以下のように表される。

$$\begin{aligned}
TU_1 &= \alpha_1 T_{\frac{1}{2}} V_{\frac{1}{2}}, \quad TU_k = \alpha_k (T_{k-\frac{1}{2}} V_{k-\frac{1}{2}} + TU_{k-1}), \\
SU_1 &= \alpha_1 S_{\frac{1}{2}} V_{\frac{1}{2}}, \quad SU_k = \alpha_k (S_{k-\frac{1}{2}} V_{k-\frac{1}{2}} + SU_{k-1}), \\
TL_{KM-1} &= \alpha_{KM-1} T_{KM-\frac{1}{2}} V_{KM-\frac{1}{2}}, \quad TL_k = \alpha_k (T_{k+\frac{1}{2}} V_{k+\frac{1}{2}} + TL_{k+1}), \\
SL_{KM-1} &= \alpha_{KM-1} S_{KM-\frac{1}{2}} V_{KM-\frac{1}{2}}, \quad SL_k = \alpha_k (S_{k+\frac{1}{2}} V_{k+\frac{1}{2}} + SL_{k+1}),
\end{aligned} \tag{7.67}$$

ここに、 $T_{k+\frac{1}{2}}$ と $S_{k+\frac{1}{2}}$ はレベル $k + \frac{1}{2}$ での水温と塩分である。この定義によると、 $\alpha_k = 1$ で他は 0 の場合、

$$\begin{aligned}
VU_k + VL_k &= V_{k-\frac{1}{2}} + V_{k+\frac{1}{2}} \\
TU_k + TL_k &= T_{k-\frac{1}{2}} V_{k-\frac{1}{2}} + T_{k+\frac{1}{2}} V_{k+\frac{1}{2}} \\
SU_k + SL_k &= S_{k-\frac{1}{2}} V_{k-\frac{1}{2}} + S_{k+\frac{1}{2}} V_{k+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

第7章 水温・塩分方程式

となり、不安定部分の体積、積算水温、積算塩分を表し、

$$\begin{aligned} TM_{k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} &= \frac{TU_k + TL_k}{VU_k + VL_k}, \\ SM_{k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} &= \frac{SU_k + SL_k}{VU_k + VL_k}, \end{aligned} \quad (7.68)$$

が、それぞれ平均水温、平均塩分を表す。

レベル k が、連続的に不安定な部分の一部であるときにも平均水温・平均塩分に対して同じ式が成り立つ。例えば、 $\alpha_{k-1} = \alpha_k = 1$ かつ $\alpha_{k-2} = \alpha_{k+1} = 0$ とすると

$$\begin{aligned} VU_{k-1} + VL_{k-1} &= VU_k + VL_k \\ &= V_{k-1-\frac{1}{2}} + V_{k-\frac{1}{2}} + V_{k+\frac{1}{2}} \\ TU_{k-1} + TL_{k-1} &= TU_k + TL_k \\ &= T_{k-1-\frac{1}{2}}V_{k-1-\frac{1}{2}} + T_{k-\frac{1}{2}}V_{k-\frac{1}{2}} + T_{k+\frac{1}{2}}V_{k+\frac{1}{2}} \\ SU_{k-1} + SL_{k-1} &= SU_k + SL_k \\ &= S_{k-1-\frac{1}{2}}V_{k-1-\frac{1}{2}} + S_{k-\frac{1}{2}}V_{k-\frac{1}{2}} + S_{k+\frac{1}{2}}V_{k+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (7.69)$$

となり、

$$\begin{aligned} TM_{k-1-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} &= \frac{TU_{k-1} + TL_{k-1}}{VU_{k-1} + VL_{k-1}} = \frac{TU_k + TL_k}{VU_k + VL_k}, \\ SM_{k-1-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} &= \frac{SU_{k-1} + SL_{k-1}}{VU_{k-1} + VL_{k-1}} = \frac{SU_k + SL_k}{VU_k + VL_k}, \end{aligned} \quad (7.70)$$

である。これらは、3層 $k-1-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}$ の平均値である。

7.4.2 作業手順

[1] 上下に続く2組の水温・塩分からその中間深度での密度を計算し、静的安定・不安定を判定する。不安定の場合には $\alpha(\alpha^1)$ に1を、その他の場合には0を入れる。また、この段階で $\beta(\beta^0)$ はすべて0とする。ここに、肩字は繰り返しの回数を示す。

ここまでは前処理であり、以下の過程（ n 回目と表現）を不安定が解消するまで繰り返す。

[2] 不安定部分の存在する水柱に対して α^n を用いて (7.65)–(7.67) 式より VU, TU, SU, VL, TL, SL を計算する。

[3] (7.68) 式より不安定部分に対して上下の平均値 TM, SM を求め、元の T, S の値をこれらで置き換える。この変更に伴い、[1] で求めた中間深度での密度の値にも修正を施す。

[4] α^n を β^n に記録する。その際、 $\alpha^n = 1$ あるいは $\alpha^n = 0$ かつ $\beta^{n-1} = 1$ の場合に $\beta^n = 1$ とし、その他の場合には $\beta^n = 0$ とする。これらは次式で表現できる。

$$\beta_k^n = \alpha_k^n + \beta_k^{n-1}(1 - \alpha_k^n) \quad (7.71)$$

[5] $\beta_k^n = 0$ の部分でのみ静的安定・不安定の判定を行う。不安定であれば $\alpha_k^{n+1} = 1$ 、その他の場合には0とする。不安定が全くなければ、その水柱についての作業は完了したことになる。

[6] 不安定の残っている水柱に対しては、以下のように、 β_k^n を用いて α_k^{n+1} に対する修正を行う。2回目以降の過程では、不安定が生じるとすれば必ず以前に混ぜて中立になっている部分の上下端でのみ生じる。

もしそれが生じれば、中立部分はすべて不安定部分として取り扱われなければならない。つまり、 $\alpha_k^{n+1} = 1$ である。いっぽう、上下端で安定であればそのままよい、つまり、 $\alpha_k^{n+1} = 0$ である。これは次式のように上下方向に 1 往復する漸化式によって表現される。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_1^{(n+1)}, \quad \gamma_k = \alpha_k^{(n+1)} + (1 - \alpha_k^{(n+1)})\beta_k^{(n)}\gamma_{k-1} \\ \alpha_{KM-1}^{(n+1)} &= \gamma_{KM-1}, \quad \alpha_k^{(n+1)} = \gamma_k + (1 - \gamma_k)\beta_k^{(n)}\alpha_{k+1}^{(n+1)} \end{aligned} \quad (7.72)$$

ここに、 γ は作業変数であるが、FORTRAN プログラム中では α そのものでよい。このあと、[2] へ戻る。

表 7.1 には 6 層の場合の例を示す。3 回の繰り返しで全層が混ぜられる過程が示されている。表中の α の 2 列目は [6] に述べられているように、 β_k^n を用いて (7.72) 式により α_k^{n+1} を修正した結果である (ただし、表中にはないが $\beta_k^0 = 0$)。

第7章 水温・塩分方程式

表 7.1: 対流調節の作業例

n	k	α		VU	VL	VU+VL	TU+TL	β
1	1	1	1	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{2\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{2\frac{1}{2}}$	$\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{T}_{1\frac{1}{2}}\mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{T}_{2\frac{1}{2}}\mathbf{V}_{2\frac{1}{2}}$	1
	2	1	1	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{1\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{2\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{2\frac{1}{2}}$	$\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{T}_{1\frac{1}{2}}\mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{T}_{2\frac{1}{2}}\mathbf{V}_{2\frac{1}{2}}$	1
	3	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	0
	5	1	1	$\mathbf{V}_{4\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{5\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{4\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{5\frac{1}{2}}$	$\mathbf{T}_{4\frac{1}{2}}\mathbf{V}_{4\frac{1}{2}} + \mathbf{T}_{5\frac{1}{2}}\mathbf{V}_{5\frac{1}{2}}$	1
2	1	0	1	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{2\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{3\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{2\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{3\frac{1}{2}}$	$\sum_{k=0}^3 \mathbf{T}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{k+\frac{1}{2}}$	1
	2	0	1	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{1\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{2\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{3\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{2\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{3\frac{1}{2}}$	$\sum_{k=0}^3 \mathbf{T}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{k+\frac{1}{2}}$	1
	3	1	1	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{2\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{3\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{2\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{3\frac{1}{2}}$	$\sum_{k=0}^3 \mathbf{T}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{k+\frac{1}{2}}$	1
	4	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	0	1
3	1	0	1	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{2\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{3\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{4\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{5\frac{1}{2}}$	$\sum_{k=0}^5 \mathbf{V}_{k+\frac{1}{2}}$	$\sum_{k=0}^5 \mathbf{T}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{k+\frac{1}{2}}$	1
	2	0	1	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{1\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{2\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{3\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{4\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{5\frac{1}{2}}$	$\sum_{k=0}^5 \mathbf{V}_{k+\frac{1}{2}}$	$\sum_{k=0}^5 \mathbf{T}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{k+\frac{1}{2}}$	1
	3	0	1	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{2\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{3\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{4\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{5\frac{1}{2}}$	$\sum_{k=0}^5 \mathbf{V}_{k+\frac{1}{2}}$	$\sum_{k=0}^5 \mathbf{T}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{k+\frac{1}{2}}$	1
	4	1	1	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{2\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{3\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{4\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{5\frac{1}{2}}$	$\sum_{k=0}^5 \mathbf{V}_{k+\frac{1}{2}}$	$\sum_{k=0}^5 \mathbf{T}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{k+\frac{1}{2}}$	1
	5	0	1	$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{1\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{2\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{3\frac{1}{2}} + \mathbf{V}_{4\frac{1}{2}}$	$\mathbf{V}_{5\frac{1}{2}}$	$\sum_{k=0}^5 \mathbf{V}_{k+\frac{1}{2}}$	$\sum_{k=0}^5 \mathbf{T}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{k+\frac{1}{2}}$	1

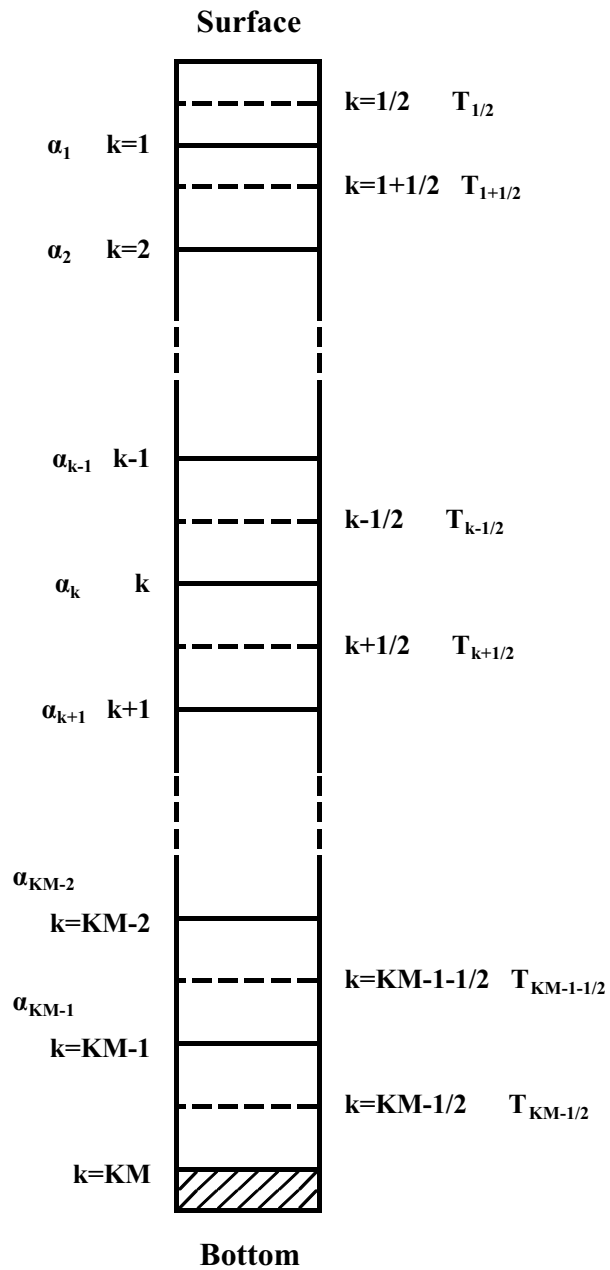


図 7.6: 第 7 章 4 節における鉛直格子点参照図

References

- Cox, M. D. 1987: Isopycnal diffusion in a z-coordinate ocean model., *Ocean Modelling*, **74**, 1-5.
- Gent, P. R., and J. C. McWilliams. 1990: Isopycnal mixing in ocean circulation models., *J. Phys. Oceanogr.*, **20**, 150-155.
- Griffies, S. M.: The Gent-McWilliams skew flux., 1998, *J. Phys. Oceanogr.*, **28**, 831-841.
- Griffies, S. M., A. Gnanadesikan, R. C. Pacanowski, V. D. Larichev, J. K. Dukowicz, and R. D. Smith., 1998: Isonutral diffusion in a z-coordinate ocean model., *J. Phys. Oceanogr.*, **28**, 805-830.
- Holland, W. R., J. C. Chow, and F. O. Bryan. 1998: Application of a third-order upwind scheme in the NCAR ocean model., *J. Climate*, **11**, 1487-1493.
- Ishizaki, H. 1997: A massive treatment scheme of complete convection for ocean models., *unpublished manuscript*, . .
- Leonard, B. P., 1979: A stable and accurate convective modeling procedure based upon quadratic upstream interpolation., *J. Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **19**, 59-98.
- Leonard, B. P., M.K. MacVean, and A. P. Lock. 1993: Positivity-Preserving Numerical Schemes for Multidimensional Advection., *NASA Tech. Memo.*, **106055**, **ICOMP-93-05**, p. 62.
- Leonard, B. P., M.K. MacVean, and A. P. Lock. 1994: The flux integral method for multidimensional convection and diffusion., *NASA Tech. Memo.*, **106679**, **ICOMP-94-13**, p. 27.
- Redi, M. H. 1982: Oceanic isopycnal mixing by coordinate rotation., *J. Phys. Oceanogr.*, **12**, 1154-1158.
- Tsujino, H., H. Hasumi, and N. Sugimotohara, 2000: Deep pacific circulation controlled by vertical diffusivity at the lower thermocline depth., *J. Phys. Oceanogr.*, **30**, 2853-2865.