

第3章 空間格子点配置と連続式

モデルの3次元的海領域は、海底に近接した部分は別として、緯度円、経度線、及びある決まった深さによって区切られる球面上の3次元的な矩形の箱の集合体として定義される。その箱の水平・鉛直の辺の長さをそれぞれ水平・鉛直の格子間隔とする。MRI.COMでは、格子間隔はその格子の方向に沿って変化することが許される(可変格子)。

3.1 水平格子点配置

図 3.1(a) に水平的な格子点配置を示す。速度の2成分と海底深度は水平的な箱の中央部(×)で定義され、トレーサ(水温と塩分)、密度、固定海面の場合の流線関数、及び自由海面の場合の海面高度は箱の四つ角の点()で定義される。今後、簡単のために、速度を定義する点をU-点、またこれを中心とする箱(図 3.1(a))をU-box、トレーサを定義する点をT-点、これを中心とする箱(U-boxとは斜めにずれ、海岸に近接した所では部分的な箱となる(図 3.3))をT-boxと呼ぶ。海岸線はU-boxの縁、すなわちT-点を結ぶ線で定義される。このような水平格子点配置はArakawaのB-格子(Arakawa 1972)と呼ばれるものである。

同じくArakawaのB-格子を用いていても、MOM及びCOCO(CCSR)では基本的な箱はT-boxであり、海岸線はU-点を結ぶ線で定義され、変数の配置も異なる(図 3.1(b))。

水平的な可変格子の場合には、図 3.1(c)に示すように、T-点はT-boxのちょうど中心で定義されるが、U-点はU-boxの中心からずれ、隣り合うU-点同士のちょうど中間にboxの壁が存在するように定義される。

本章を含め、差分表現を行う際には、変数名の右下に添字をつけて表現するが、水平方向には、例えばT-点を基準とし、それを添字 (i, j) と表現した場合、その右上のU-点は $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ と表現する。章によっては、基準点をT-点以外にとる場合があるが、差分式を示す前に、基準をどこにとるのかを示すことにする。

3.2 鉛直格子点配置

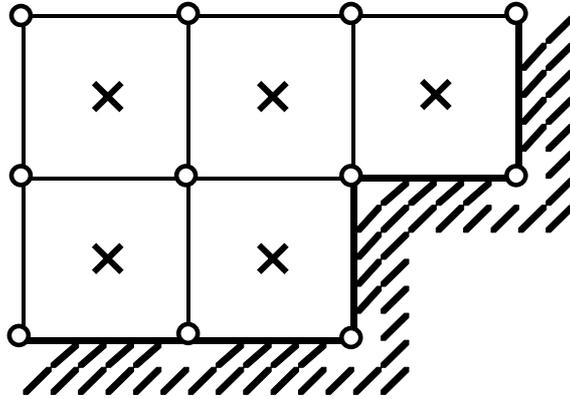
鉛直格子点配置は可変格子が普通である(表層は細かく、深層は粗い)。図 3.2(a)に示すように、boxの中央部の深さでトレーサ()と流速(×)を、境界で鉛直の質量フラックス W ()を定義するが、鉛直に隣り合うトレーサ・流速レベルのちょうど中間にbox境界が来るようにする。また、 W はT-boxに対するもの(W^T ;)とU-boxに対するもの(W^U ;)の2種類を定義するが、次節で述べるように、 W^U は W^T の平均操作により求める。それらの水平的な位置関係は図 3.1(a)で示したT-点、U-点に対応するものである。

海底地形をできるだけ滑らかに表現するために、各水平格子box(U-box)の最深層はその基準層厚の1割程度を切らない範囲で可変である(図 3.2(b))。もし、これができないと、緩やかに変化する海底は図 3.2(c)に示すように、広い平底と所々の1鉛直格子分の崖によって表され、崖に集中する鉛直流速によって、崖に沿って非現実的な水平的に強い流れが形成される場合が出現する。

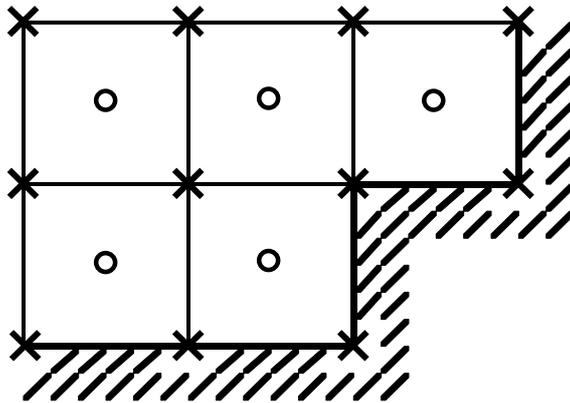
差分表現を行う際の鉛直方向の添字のつけ方は、鉛直流速が定義されるレベルをT-点、U-点の上面とし、それを k と表現した場合、T-点、U-点は $k + \frac{1}{2}$ で定義される(図 3.2(a))。章によっては、基準点を鉛直流速のレベル以外にとる場合があるが、差分式を示す前に、基準をどこにとるのかを示すことにする。

第3章 空間格子点配置と連続式

(a)



(b)



(c)

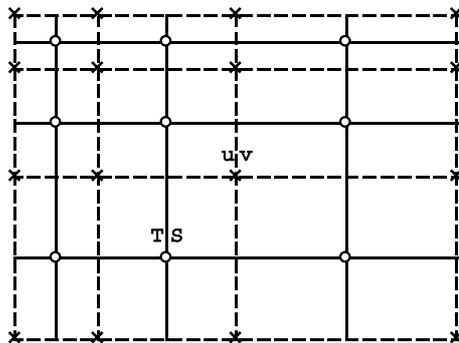
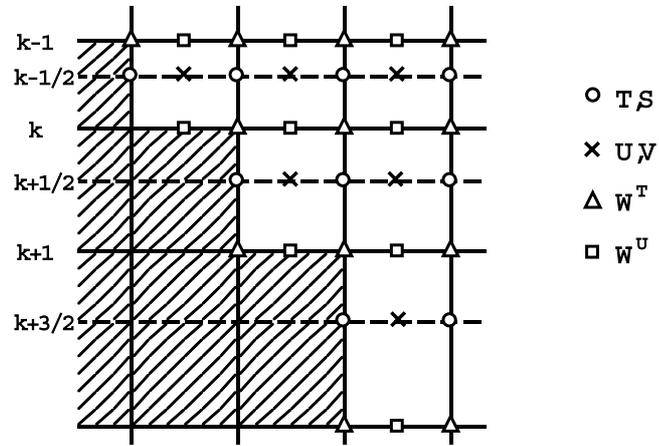
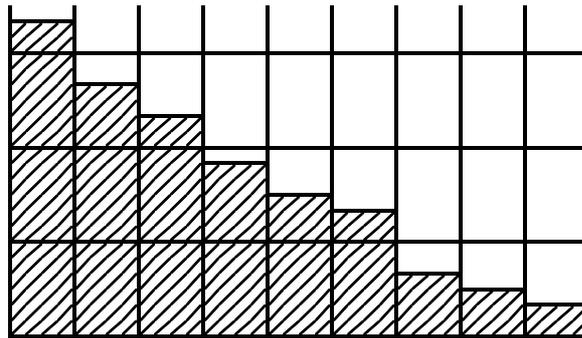


図 3.1: 水平格子点配置。(a) MRI.COM (: $T, S, \psi, \eta, \mathbf{x}:u, v, H$), (b) MOM 及 \mathcal{U}^{δ} COCO (: $T, S, \psi, \eta, H, \mathbf{x}:u, v$), (c) MRI.COM の水平可変格子

(a)



(b)



(c)

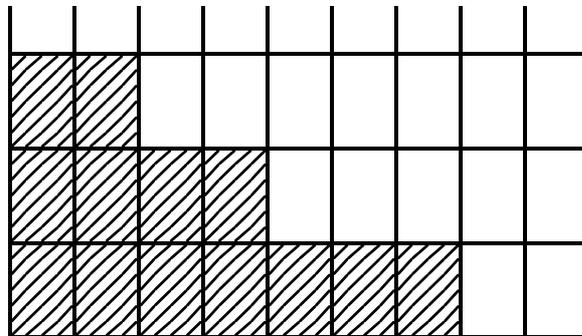


図 3.2: 鉛直格子点配置。(a) 格子点配置, (b) 滑らかに変化する海底, (c) 階段状に変化する海底

3.3 連続式

運動量・トレーサの移流表現のもとになる質量（体積）フラックスは連続式の差分表現によって表される。T-box と U-box（図 3.3）に対する連続式の差分表現は異なる。MRI.COM では T-box に対する連続式を基本とし、その平均操作によって U-box に対する連続式を導き出す。これにより、U-box に対する連続式を独立に求めた場合に現れる W^U の大きなノイズ（格子間隔が小さくなるほど大きくなる）（Webb 1995）を防ぐことができる。

T-box に対する連続式の差分表現は、box の各面を通過する質量フラックスを用いて、図 3.3(a) に基づき以下のようになる。

$$\begin{aligned} MC_{i,j}^T &\equiv U_{i-\frac{1}{2},j}^T - U_{i+\frac{1}{2},j}^T + V_{i,j-\frac{1}{2}}^T - V_{i,j+\frac{1}{2}}^T + W_{i,j,k+1}^T - W_{i,j,k}^T \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここに、

$$U_{i+\frac{1}{2},j}^T = u_{i+\frac{1}{2},j}^* \Delta y_{i+\frac{1}{2},j} \Delta z, \quad V_{i,j+\frac{1}{2}}^T = v_{i,j+\frac{1}{2}}^* \Delta x_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta z, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2},j}^* &= \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}), \\ v_{i,j+\frac{1}{2}}^* &= \frac{1}{2}(v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

である。海岸線に沿った部分 T-box（図 3.3(b)）に対しては以下のように定義される。

$$V_{i,j+\frac{1}{2}}^T = \frac{1}{2}v_{i,j+\frac{1}{2}}^* \Delta x_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta z, \quad V_{i,j-\frac{1}{2}}^T = \frac{1}{2}v_{i,j-\frac{1}{2}}^* \Delta x_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta z, \quad (3.4)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^* = v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \quad v_{i,j-\frac{1}{2}}^* = v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \quad u_{i-\frac{1}{2},j}^* = 0. \quad (3.5)$$

また、図 3.3(c) のような凸部に対しては、

$$U_{i-\frac{1}{2},j}^T = \frac{1}{2}u_{i-\frac{1}{2},j}^* \Delta y_{i-\frac{1}{2},j} \Delta z, \quad V_{i,j-\frac{1}{2}}^T = \frac{1}{2}v_{i,j-\frac{1}{2}}^* \Delta x_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta z, \quad (3.6)$$

$$u_{i-\frac{1}{2},j}^* = u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \quad v_{i,j-\frac{1}{2}}^* = v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \quad (3.7)$$

となる。

$W_{i,j}^T$ に対する境界条件は、

$$W_{i,j}^T = 0$$

が海面と海底（固定海面モデル）または、海底だけ（自由海面モデル）で成り立つことである。

一方、U-box($i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}$) に対する連続式は、図 3.3(a,b,c) から

$$\begin{aligned} MC_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^U &\equiv \frac{MC_{i,j,k+\frac{1}{2}}^T}{N_{i,j,k+\frac{1}{2}}} + \frac{MC_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}^T}{N_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}} + \frac{MC_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}^T}{N_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}} + \frac{MC_{i+1,j+1,k+\frac{1}{2}}^T}{N_{i+1,j+1,k+\frac{1}{2}}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

によって定義され、 $N_{i,j,k+\frac{1}{2}}$ は $k + 1/2$ 層目の T-点 (i, j) の周りでの海 box の数を表す。図 3.3(a) のように地形から離れている場合には一般に $N = 4$ であるが、図 3.3(b,c) のように地形に接する T-box に対しては $N < 4$ となる。上式は U-box の質量収束が、周りの 4 つの T-box の質量収束の和から成ることを表す。

海岸地形から十分離れた U-box($i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}$) に対する連続式 (標準型) は、

$$\begin{aligned} MC_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^U &\equiv \frac{1}{4}(MC_{i,j}^T + MC_{i+1,j}^T + MC_{i,j+1}^T + MC_{i+1,j+1}^T) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

であり、書き下すと以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(U_{i,j}^U + U_{i,j+1}^U) - \frac{1}{2}(U_{i+1,j}^U + U_{i+1,j+1}^U) + \frac{1}{2}(V_{i,j}^U + V_{i+1,j}^U) \\ - \frac{1}{2}(V_{i,j+1}^U + V_{i+1,j+1}^U) = W_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^U - W_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1}^U \end{aligned} \quad (3.10)$$

ここに、 $U_{i,j}^U$ 、 $V_{i,j}^U$ 、 $W_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^U$ はそれぞれ以下のように定義される。

$$U_{i,j}^U = u_{mi,j} \Delta y_{i,j} \Delta z, \quad V_{i,j}^U = v_{mi,j} \Delta x_{i,j} \Delta z, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} u_{mi,j} &= \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j}^* + u_{i-\frac{1}{2},j}^*), \\ v_{mi,j} &= \frac{1}{2}(v_{i,j+\frac{1}{2}}^* + v_{i,j-\frac{1}{2}}^*), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$W_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^U = \frac{1}{4}(W_{i,j,k}^T + W_{i+1,j,k}^T + W_{i,j+1,k}^T + W_{i+1,j+1,k}^T). \quad (3.13)$$

このように、標準型に対しては、(3.2)、(3.11)、(3.12) より、

$$\begin{aligned} U_{i,j}^U &= \frac{1}{2}(U_{i+\frac{1}{2},j}^T + U_{i-\frac{1}{2},j}^T), \\ V_{i,j}^U &= \frac{1}{2}(V_{i,j+\frac{1}{2}}^T + V_{i,j-\frac{1}{2}}^T) \end{aligned} \quad (3.14)$$

が成り立つ。

水平可変格子 (図 3.1(c)) に対しても、以上の関係はそのまま成り立つ。

標準型の連続式 (3.10) の左辺は水平の座標軸の方向に沿った質量フラックスの収束を表し、連続式自体としてはこれで完了であるが、運動量移流の計算に用いる場合には左辺を次のように書き換えて座標軸に対して斜め方向の質量フラックスの収束として表現したのも使用する。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(U_{i,j}^U + V_{i,j}^U) - \frac{1}{2}(U_{i+1,j+1}^U + V_{i+1,j+1}^U) + \frac{1}{2}(U_{i,j+1}^U - V_{i,j+1}^U) \\ - \frac{1}{2}(U_{i+1,j}^U - V_{i+1,j}^U) = W_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^U - W_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1}^U \end{aligned} \quad (3.15)$$

左辺第 1 項を例に取ると、(3.14) より

$$U_{i,j}^U + V_{i,j}^U = \frac{1}{2}((U_{i-\frac{1}{2},j}^T + V_{i,j-\frac{1}{2}}^T) + (U_{i+\frac{1}{2},j}^T + V_{i,j+\frac{1}{2}}^T)). \quad (3.16)$$

もし、流れの水平非発散を仮定すると、右辺第 1 項の $U_{i-\frac{1}{2},j}^T$ と $V_{i,j-\frac{1}{2}}^T$ はそれぞれ 2 つの U-点 ($i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}$) と ($i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}$)、並びに ($i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}$) と ($i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}$) での流線関数を用いて表現でき、その和は結局 2 つの U-点 ($i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}$) と ($i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}$) を結ぶ斜めの断面を横切る正味の質量フラックスとなる (図 3.3(b))。右辺第 2 項も経路は異なるが同じものを意味する。従って、(3.15) の左辺を 2 倍したものは 4 つの U-点 ($i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}$)、($i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}$)、($i + \frac{3}{2}, j + \frac{1}{2}$) および ($i + \frac{1}{2}, j + \frac{3}{2}$) で定義される斜めの矩形に対する水平収束を表し、全体に $1/2$ を掛けることにより、水平断面積が半分である U-box($i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}$) に対する水平収束を表す。

第3章 空間格子点配置と連続式

(3.10) の左辺を $A_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ 、(3.15) の左辺を $B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ とすると、運動量移流で用いられる U-box に対する連続式の標準型は

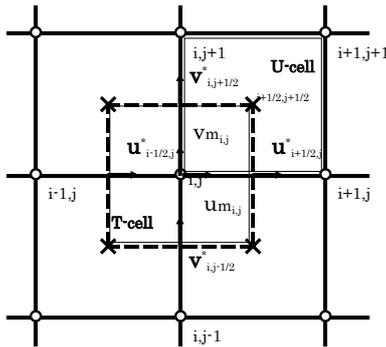
$$\alpha A_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \beta B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = W_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^U - W_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1}^U \quad (3.17)$$

ただし、

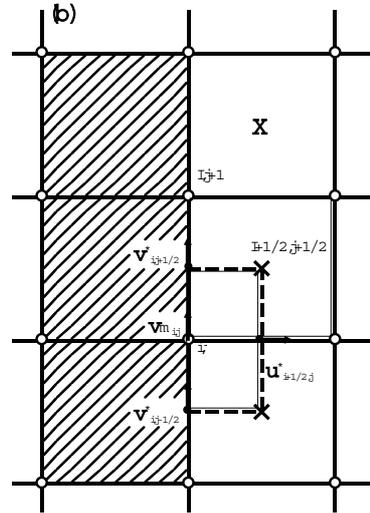
$$\alpha + \beta = 1 \quad (3.18)$$

と表される。後に示されるように、一般化された荒川スキームでは $(\alpha, \beta) = (2/3, 1/3)$ 、また、地形近傍で一般化した連続式から導かれる標準型では $(\alpha, \beta) = (1/2, 1/2)$ となる。Webb (1995) が提唱しているのは $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ である。

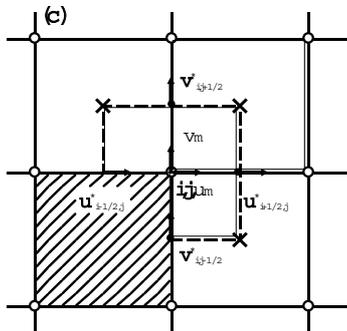
(a)



(b)



(c)



(d)

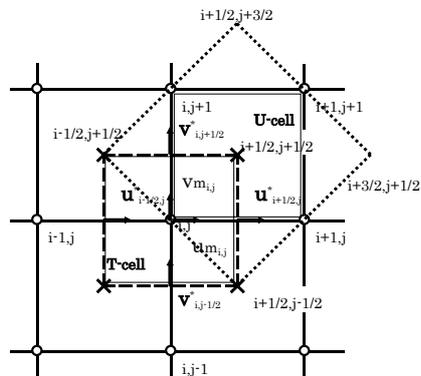


図 3.3: 変数の水平配置。(a) T-box と U-box の関係 (標準型)、(b),(c) T-box と U-box の関係 (沿岸部)、(d) 水平座標軸に斜め方向の矩形 box と質量フラックス

3.4 面積計算

MRI.COM では、方程式を解く際、U-box, T-box の境界面からの出入りの収支として物理量の時間変化を計算するが、この際、各格子箱の面積・体積を計算しておくことが必要となる。これらの面積・体積は以下のように数値的に計算する。

モデル座標 (μ, ψ, a) で表す球面上の点の経度 λ 、緯度 ϕ はあらかじめ与えられている。つまり、

$$\lambda = \lambda(\mu, \psi), \quad \phi = \phi(\mu, \psi)$$

なる関数関係がある。

たとえばある T-点 $(\mu(i), \psi(j))$ とそこから $1/2$ 格子分東側の点 $(\mu(i + \frac{1}{2}), \psi(j))$ との間隔 (モデル内変数名: dx_b1) については、 $\mu_1 = \mu(i), \mu_2 = \mu(i + \frac{1}{2}), \psi_1 = \psi(j)$ とし、 μ_1 と μ_2 を M 分割して、数値的に以下のように近似できる。

$$\sum_{m=1}^M L \left[\lambda \left(\mu_1 + (m-1)\delta\mu, \psi_1 \right), \phi \left(\mu_1 + (m-1)\delta\mu, \psi_1 \right), \lambda \left(\mu_1 + m\delta\mu, \psi_1 \right), \phi \left(\mu_1 + m\delta\mu, \psi_1 \right) \right] \quad (3.19)$$

ここで、 $L[\lambda_1, \phi_1, \lambda_2, \phi_2]$ は球面上の 2 点 (λ_1, ϕ_1) と (λ_2, ϕ_2) を結ぶ大円距離とする。また、 $\delta\mu = (\mu_2 - \mu_1)/M$ である。

同様にして、4 点 $(\mu(i), \psi(j))$ 、 $(\mu(i + \frac{1}{2}), \psi(j))$ 、 $(\mu(i + \frac{1}{2}), \psi(j + \frac{1}{2}))$ 、 $(\mu(i), \psi(j + \frac{1}{2}))$ で囲まれる $1/4$ 格子単位の面積 (a_b1) は、 $\psi_2 = \psi(j + \frac{1}{2})$ 、 $\delta\psi = (\psi_2 - \psi_1)/N$ (ψ_1 と ψ_2 を N 分割する) として

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M L \left[\lambda \left(\mu_1 + (m-1)\delta\mu, \psi_1 + (n - \frac{1}{2})\delta\psi \right), \quad \phi \left(\mu_1 + (m-1)\delta\mu, \psi_1 + (n - \frac{1}{2})\delta\psi \right), \right. \\ & \quad \lambda \left(\mu_1 + m\delta\mu, \psi_1 + (n - \frac{1}{2})\delta\psi \right), \quad \left. \phi \left(\mu_1 + m\delta\mu, \psi_1 + (n - \frac{1}{2})\delta\psi \right) \right] \\ & \quad \times \\ & L \left[\lambda \left(\mu_1 + (m - \frac{1}{2})\delta\mu, \psi_1 + (n-1)\delta\psi \right), \quad \phi \left(\mu_1 + (m - \frac{1}{2})\delta\mu, \psi_1 + (n-1)\delta\psi \right), \right. \\ & \quad \lambda \left(\mu_1 + (m - \frac{1}{2})\delta\mu, \psi_1 + n\delta\psi \right), \quad \left. \phi \left(\mu_1 + (m - \frac{1}{2})\delta\mu, \psi_1 + n\delta\psi \right) \right] \quad (3.20) \end{aligned}$$

のように計算する。

$a_bl_{i,j}$ は U-点左下の $1/4$ 格子単位の面積であるが、同様にして $a_br_{i,j}$ (右下)、 $a_tl_{i,j}$ (左上)、 $a_tr_{i,j}$ (右上) も求める。

U 点を中心とする格子単位の面積:

$$area_{i,j} = a_bl_{i,j} + a_br_{i,j} + a_tl_{i,j} + a_tr_{i,j} \quad (3.21)$$

T 点を中心とする格子単位の面積:

$$area_{i,j} = a_bl_{i,j} + a_br_{i-1,j} + a_tl_{i,j-1} + a_tr_{i-1,j-1} \quad (3.22)$$

となる。

第3章 空間格子点配置と連続式

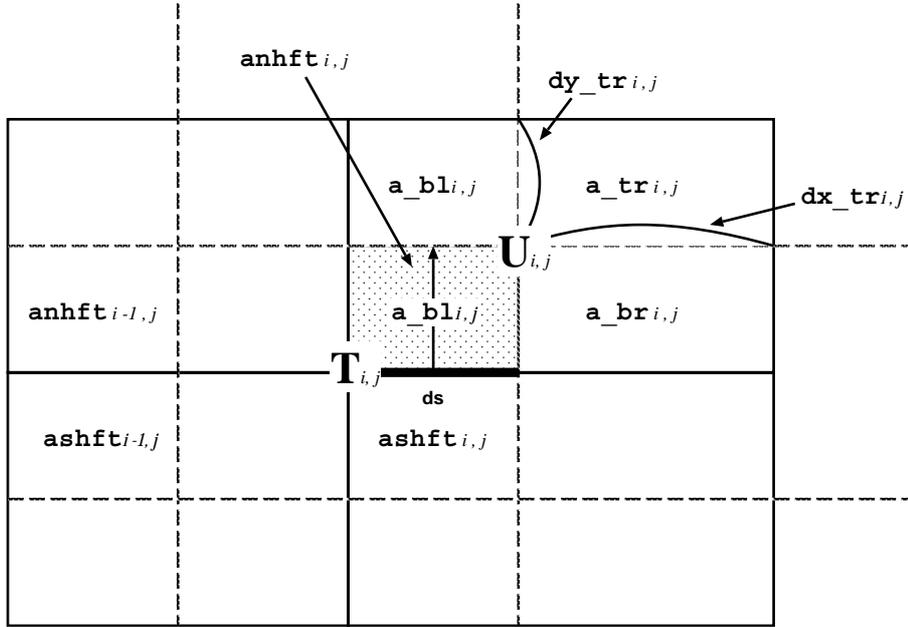


図 3.4: 面積を計算する際の格子単位

地理座標の場合

T-box を 4 分割したものを考える (図 3.4)、T 点の北東部分 (anhft、北西部分も同じ面積を持つ) については、図 3.4 の太線を緯度方向に積分 $[\phi, \phi + \Delta\phi/2]$ したものととして求める。ただし、 $\Delta\phi = \phi(j + \frac{1}{2}) - \phi(j - \frac{1}{2})$ である。緯線に沿った太線の長さ (Δs) は、T 点の緯度 $\phi(j)$ 、T 点の格子単位の東西幅 $\Delta\lambda = \lambda(i + \frac{1}{2}) - \lambda(i - \frac{1}{2})$ 、地球半径 a を用いて

$$\Delta s = a \frac{\Delta\lambda}{2} \cos \phi \tag{3.23}$$

と表される。これを緯度方向に積分する。

$$\begin{aligned} \text{anhft}_{i,j} &= \int_{\phi}^{\phi + \frac{\Delta\phi}{2}} \Delta s a d\phi = \frac{a^2 \Delta\lambda}{2} \int_{\phi}^{\phi + \frac{\Delta\phi}{2}} \cos \phi d\phi = \frac{a^2 \Delta\lambda}{2} \left\{ \sin \left(\phi + \frac{\Delta\phi}{2} \right) - \sin \phi \right\} \\ &= a^2 \Delta\lambda \cos \left(\phi + \frac{\Delta\phi}{4} \right) \sin \frac{\Delta\phi}{4} \\ &= a^2 \Delta\lambda \left(\cos \phi \cos \frac{\Delta\phi}{4} - \sin \phi \sin \frac{\Delta\phi}{4} \right) \sin \frac{\Delta\phi}{4} \\ &= a^2 \Delta\lambda \cos \phi \cos \frac{\Delta\phi}{4} \sin \frac{\Delta\phi}{4} \left(1 - \tan \phi \tan \frac{\Delta\phi}{4} \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \Delta\lambda \cos \phi \sin \frac{\Delta\phi}{2} \left(1 - \tan \phi \tan \frac{\Delta\phi}{4} \right) \end{aligned} \tag{3.24}$$

同様にして、T 点の南東の部分 (モデル内の変数名は、ashft、南西部分も同じ面積を持つ) の面積は次のようになる。

$$\text{ashft}_{i,j} = \frac{a^2}{2} \Delta\lambda \cos \phi \sin \frac{\Delta\phi}{2} \left(1 + \tan \phi \tan \frac{\Delta\phi}{4} \right) \tag{3.25}$$

北極・南極 (T 点) では、 $\phi = \pm 90^\circ$ なので、式 (3.24)、式 (3.25) をそれぞれ

$$\text{anhft}_{i,j} = \frac{a^2}{2} \Delta\lambda \sin \frac{\Delta\phi}{2} \left(\cos \phi - \sin \phi \tan \frac{\Delta\phi}{4} \right) \quad (3.26)$$

$$\text{ashft}_{i,j} = \frac{a^2}{2} \Delta\lambda \sin \frac{\Delta\phi}{2} \left(\cos \phi + \sin \phi \tan \frac{\Delta\phi}{4} \right) \quad (3.27)$$

とした上で、北極で

$$\text{anhft}_{i,j} = 0 \quad (3.28)$$

$$\text{ashft}_{i,j} = \frac{a^2}{2} \Delta\lambda \sin \frac{\Delta\phi}{2} \tan \frac{\Delta\phi}{4} \quad (3.29)$$

南極で

$$\text{anhft}_{i,j} = \frac{a^2}{2} \Delta\lambda \sin \frac{\Delta\phi}{2} \tan \frac{\Delta\phi}{4} \quad (3.30)$$

$$\text{ashft}_{i,j} = 0 \quad (3.31)$$

とする。

モデルでは、

$$\text{a_bl}_{i,j} = \text{anhft}_{i,j}$$

$$\text{a_br}_{i,j} = \text{anhft}_{i+1,j}$$

$$\text{a_tl}_{i,j} = \text{ashft}_{i,j+1}$$

$$\text{a_tr}_{i,j} = \text{ashft}_{i+1,j+1}$$

とし、(3.21)、(3.22) 式によって U-点、T-点を中心とする格子単位の面積を計算する。

References

- Arakawa, A. 1972: Design of the UCLA general circulation model, *Numerical Simulation Weather and Climate, Tech. Rep. No. 7, Dep. of Meteorology, University of California, Los Angeles*, 116 pp.
- Ishizaki, H. and T. Motoi, 1999: Reevaluation of the Takano-Oonishi scheme for momentum advection on bottom relief in ocean models, *J. Atmos. Ocean. Tech.*, **16**, 1994–2010.
- Webb, D. J., 1995: The vertical advection of momentum in Bryan-Cox-Semtner ocean general circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 3186–3195.

