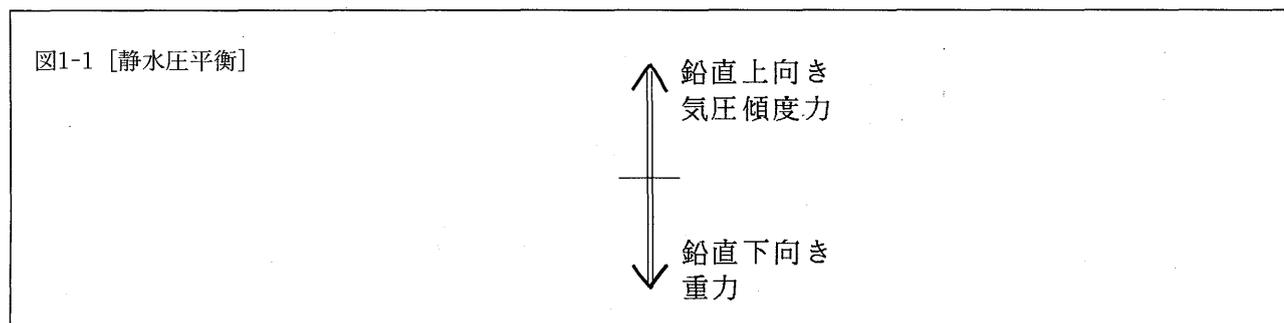


## 第 1 部 一般的基礎

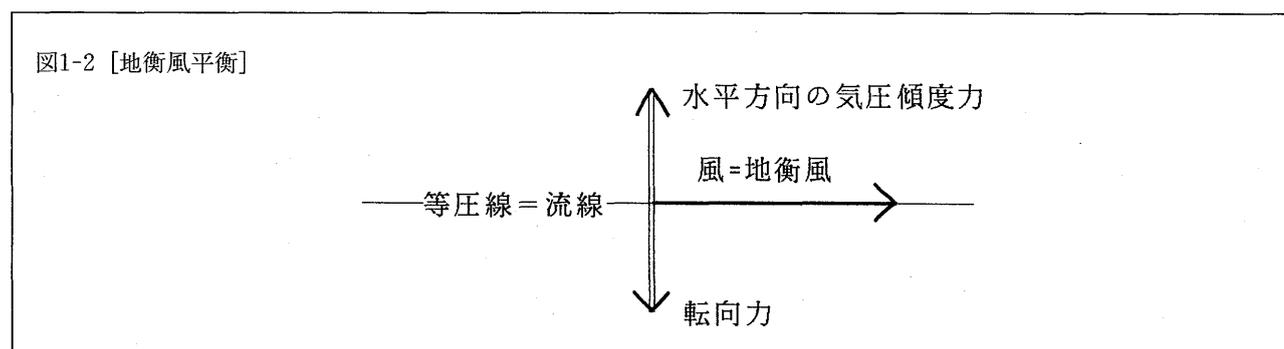
## 1 大規模現象と中小規模現象

大規模現象では鉛直方向には「鉛直上向きの気圧傾度力」と「鉛直下向きの重力」がほぼ釣り合っている。気圧傾度力とは、気圧の高い所から低い所に向かって働く力である。上よりも下の方が気圧が高いため鉛直上向きに成る。重力は地球が物を引っ張る力である。引っ張る力であるから鉛直下向きとなる。この釣り合いは静水圧平衡と呼ばれている。図1-1参照。



$$\text{静水圧平衡： 気圧傾度力} + \text{重力} = 0 \quad (1-1)$$

更に水平方向には「水平方向の気圧傾度力」と「転向力」がほぼ釣り合っている。転向力とは、回転する地球上の観測者から大気の見え方を、大気に働く様に見える力である。転向力は風速度から右に90度の方向を向いている。気圧傾度力は等圧線に直交している。従って流線は等圧線に沿っている事に成る。この釣り合いは地衡風平衡と呼ばれている。図1-2参照。



$$\text{地衡風平衡： 気圧傾度力} + \text{転向力} = 0 \quad (1-2)$$

この釣り合いの結果、大規模現象の風は第1次近似で（大まかに見れば）地衡風に等しい。地衡風とは「水平方向の気圧傾度力と釣り合う風」という意味である。この2つの釣り合いの故に、大規模現象は静水圧平衡・地衡風平衡を基に構成された準地衡風方程式系（以下QG系）で記述される。

$$\text{QG系} = \text{静水圧平衡} \cdot \text{地衡風平衡} + \text{補正} \quad (1-3)$$

QG系は元の流体方程式系（以下P系）に比べて簡単な形をしている。それ故に見通しが良い。且つ「温位保存則」と「エネルギー保存則」と「渦位保存則」の3つの基本的保存則が簡潔な形で成立している。温位とエネルギーと渦位に就いては後に説明する。

QG系で記述される大規模現象では、静水圧平衡は何時でも殆ど厳密に成り立っている。しか地衡風平衡は平衡として

安泰に在り続ける訳ではない。地衡風自身が地衡風平衡を破壊する様に吹く。即ち地衡風は、流線を等圧線からずらせる様に（或は等圧線を流線からずらせる様に）吹く。

地衡風 → 地衡風平衡の破壊. (1-4)

この「地衡風自身による地衡風平衡の破壊」の傾向性は「Qベクトル」と呼ばれる物理量によって記述される。

地衡風平衡の破壊 → Qベクトル. (1-5)

このQベクトルは「非地衡風の循環」を引き起こす。非地衡風とは本当の風と地衡風との差である。

Qベクトル → 非地衡風循環. (1-6)

この非地衡風の循環は「地衡風平衡を回復」する様に吹く。即ち非地衡風循環は、流線を等圧線に沿わせる様に（或は等圧線を流線に沿わせる様に）吹く。

非地衡風循環 → 地衡風平衡の回復. (1-7)

地衡風は水平流だが、非地衡風は鉛直流を伴っている。この鉛直流により雲ができて雨の降ることがある。

非地衡風循環 → 鉛直流 → 雲・雨. (1-8)

地衡風による不断の地衡風平衡の破壊と、非地衡風による不断の地衡風平衡の回復を通じて、第1近似として地衡風平衡の状態を維持している。図1-3参照。

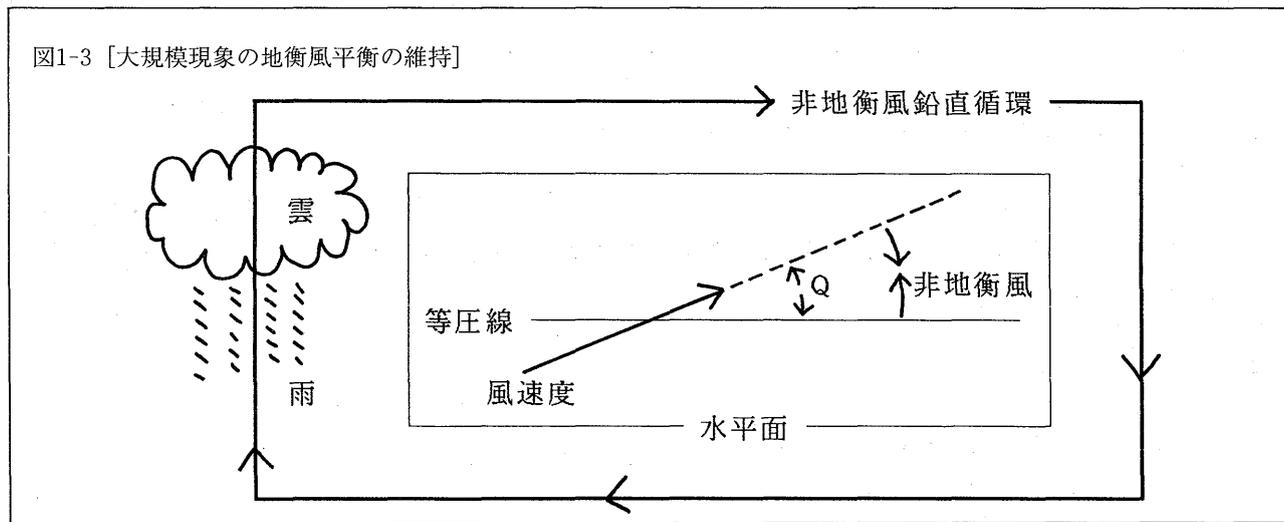


図1-3 [大規模現象の地衡風平衡の維持]

地衡風による地衡風平衡の破壊
→
第1次近似としての地衡風平衡の維持


非地衡風による地衡風平衡の回復
←
(1-9)

Qベクトルは非地衡風の鉛直2次元断面内の2次元循環を引き起こす。このQベクトルを3次元へと一般化した物は「Cベクトル」と呼ばれている。Cベクトルは非地衡風の3次元循環（鉛直2次元循環+水平循環）を引き起こす。QベクトルやCベクトルに就いて詳しく知りたい人はKanehisa (1993b) を参照。

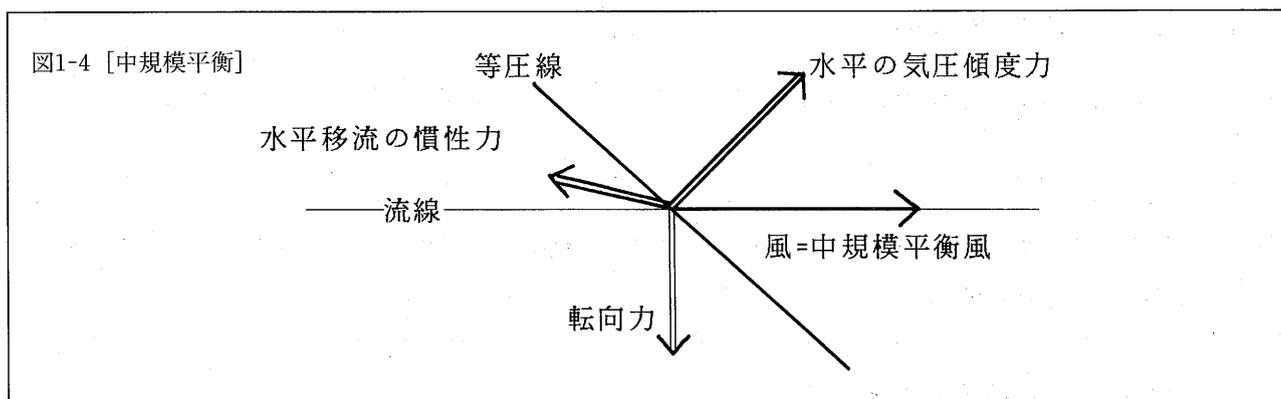
中小規模現象を記述する方程式系の一つに半地衡風方程式系（以下SG系）がある。SG系ではQG系と同様に第1次近

似の風は地衡風である。QG系との違いは非地衡風（本当の風と地衡風の差）による移流（流体粒子を運ぶ事）を取り入れた事にある。即ちQG系では地衡風で移流するが、SG系では、本当の風（地衡風+非地衡風）で移流する。

$$SG系 = QG系 + 非地衡風による移流. \quad (1-10)$$

SG系ではQG系と同様に「温位保存則」と「エネルギー保存則」と「渦位保存則」の3つの基本的保存則が成立する。更にSG系では、上の大規模現象のQG系の所で述べたのと同様に、比較的簡潔な現象像を描く事ができる。しかし中小規模現象一般を記述する為にはSG系はQG系に近すぎる。

SG系以外にも中小規模現象を記述する方程式が在る。セミバランス系（以下SB系）やバランス方程式系（以下BE系）等である。これらは鉛直方向には（QG系やSG系と同様に）静水平衡を仮定している。しかし水平方向には（QG系やSG系と異なり）第1次近似の風は「水圧の気圧傾度力」と「転向力」と「水圧移流による慣性力」が釣り合う風（中規模平衡風）である。水平移流の慣性力とは、或点の上流から運ばれて来る運動の勢いが其点に及ぼす力である。図1-4参照。

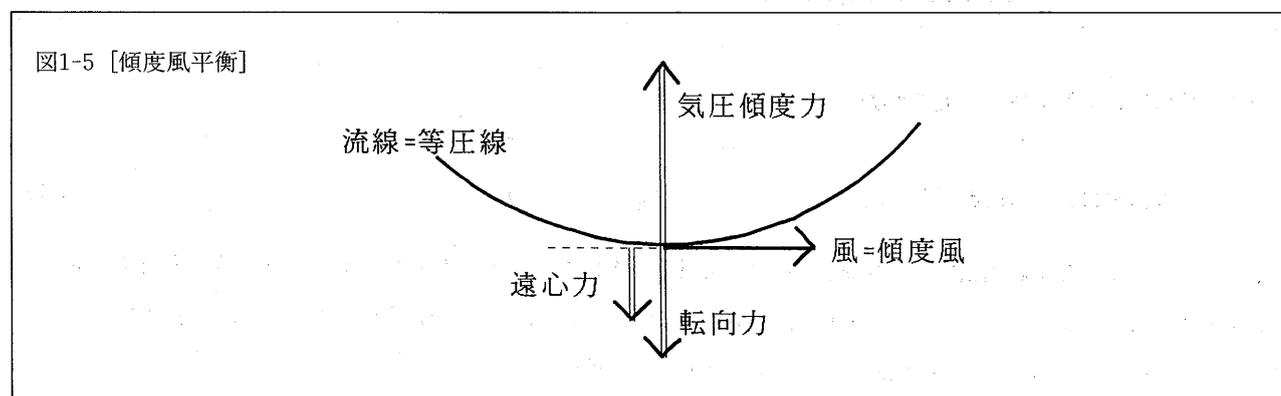


$$\text{中規模平衡: 気圧傾度力} + \text{転向力} + \text{水平移流の慣性力} = 0. \quad (1-11)$$

大規模現象ではその規模の大きさの故に慣性力は小さい。その結果、中規模平衡（1-11）の慣性力は無視されて地衡風平衡（1-2）に簡単化される。台風のような軸対称流の傾度風平衡は、中規模平衡の一つの特殊な場合である。言い換えると、中規模平衡は傾度風平衡の一般化である。

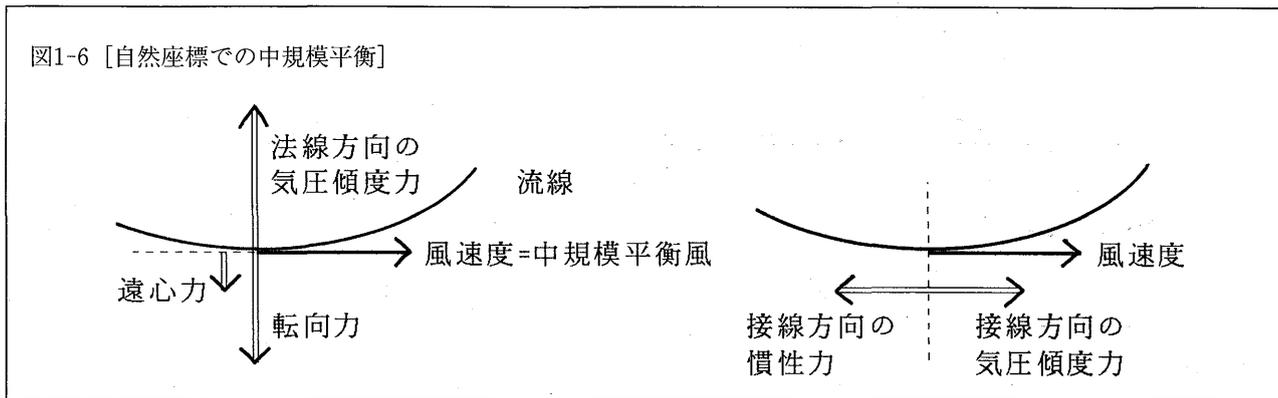
$$\text{中規模平衡} \supset \text{傾度風平衡}. \quad (1-12)$$

傾度風平衡は「気圧傾度力」と「転向力」と「遠心力」の釣り合いである。図1-5参照。



傾度風平衡： 気圧傾度力 + 転向力 + 遠心力 = 0. (1-13)

一見した所では、中規模平衡 (1-11) と傾度風平衡 (1-13) は似ていない。試みに中規模平衡を自然座標で表現して見る。自然座標とは流線に沿った方向 (接線方向) と垂直な方向 (法線方向) を座標軸の方向に選ぶ事を意味する。すると法線方向には傾度風平衡と同じ様に「法線方向の気圧傾度力」と「転向力」と「遠心力」の釣り合いと成る。接線方向には「接線方向の気圧傾度力」と「接線方向の慣性力」の釣り合いと成る。図1-6参照。



法線方向： 法線方向の気圧傾度力 + 転向力 + 遠心力 = 0. (1-14a)

接線方向： 接線方向の気圧傾度力 + 接線方向の慣性力 = 0. (1-14b)

軸対称流の傾度風平衡では、流線と等圧線がたまたま一致している。即ち接線方向の気圧傾度力は零である。しかし一般の中規模平衡では、流線と等圧線が一致する事は希である。

SB系は静水圧平衡・中規模平衡を基に構成されている。

SB系 = 静水圧平衡・中規模平衡 + 補正. (1-15)

大規模現象を記述するQG系では、慣性力は第1次近似で無視された (即ち地衡風平衡 (1-2))。SB系やBE系では、第1次近似で慣性力を考慮している (即ち中規模平衡 (1-11))。従ってSB系やBE系は、かなり広い範囲の中小規模現象を記述できる様に見える。しかしこれらはP系に比べて非常に複雑な形をしている。それ故に見通しが悪い。そして簡潔な現象像を思い描く事ができない。更に悪い事にSB系やBE系では「エネルギー保存則」或は「渦位保存則」が成立しない。

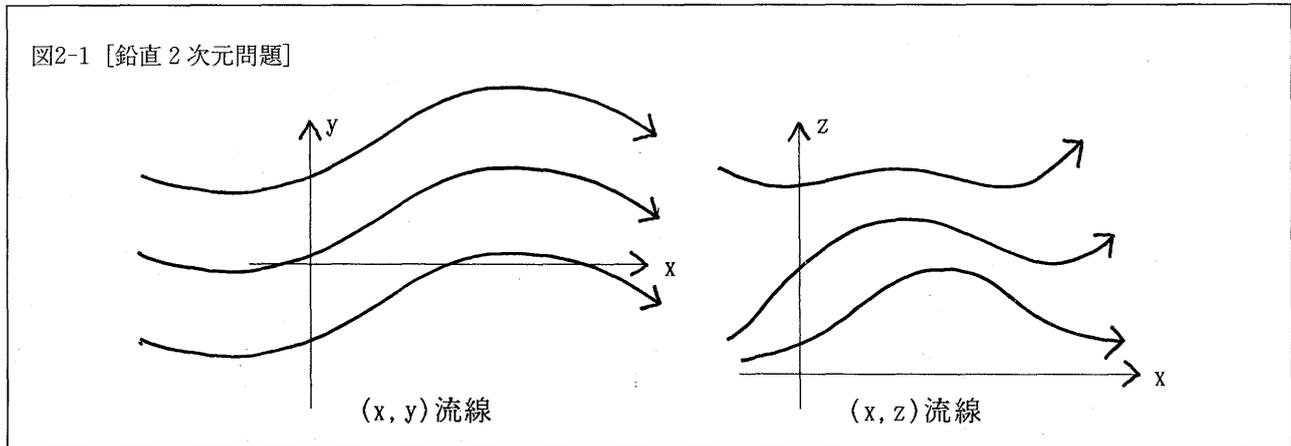
著者の知る限り現在迄のところ「大規模現象に対するQG系」の様な (即ちP系よりも見通しが良くて3つの基本的保存則の成立する)「中小規模現象に対する方程式系」は存在しない (正確に言うと、存在しないのではなくて発見されていない)。故に中小規模現象を記述するにはP系を使う事に成る。

## 2 鉛直 2 次元問題

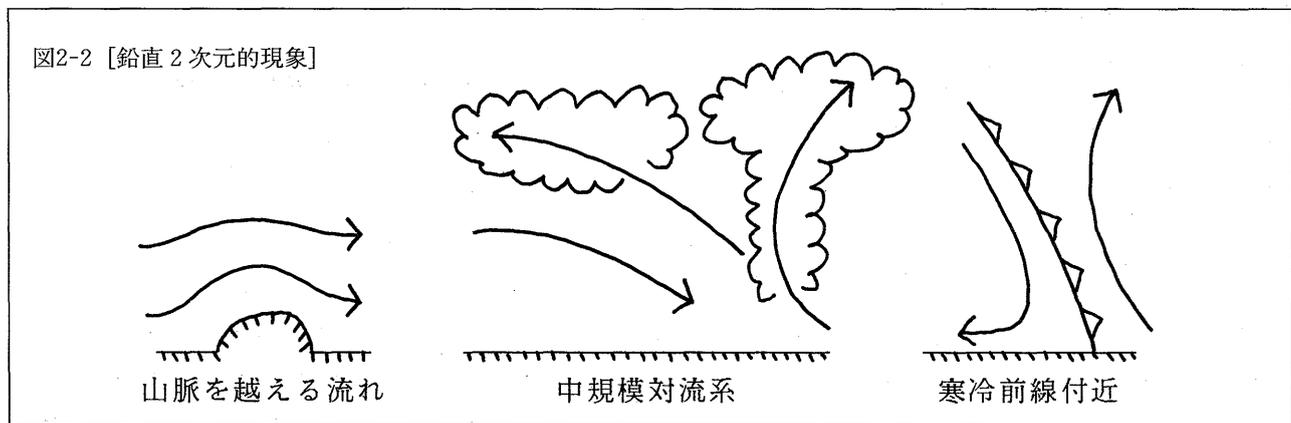
3次元問題、即ち縦・横・高さの全ての方向に物理量 (例えば速度や温度など) が変化する一般の問題、が解ければ良いが難しい。故に鉛直 2次元問題を考える。鉛直 2次元とは水平の或る方向 (以下y方向) に速度分布が一様である事を意味する。即ち速度が水平の他の方向 (以下x方向) と鉛直方向 (以下z方向) にのみ変化する事を意味する。

$$\begin{aligned} \partial u / \partial y = 0, \quad \partial v / \partial y = 0, \quad \partial w / \partial y = 0, \\ u = u(x, z), \quad v = v(x, z), \quad w = w(x, z). \end{aligned} \quad (2-1)$$

但し  $(u, v, w)$  は速度の  $(x, y, z)$  成分である。y 方向の速度成分  $v$  は一般に零ではない。特に地球回転の効果が入っている場合には一般に零ではあり得ない。何故なら  $x$  方向の速度成分  $u$  には  $y$  方向の偏向力が伴う。これに釣り合う気圧傾度力 (或は他の力) が無い限り、 $y$  方向の速度成分  $v$  が惹起されるからである。図2-1参照。



現実には厳密な鉛直 2 次元現象は存在しない。しかし近似的な鉛直 2 次元現象は幾つか在る。例えば山脈を越える流れには、山脈の方向に近似的に一樣と見なせるものが在る。中規模対流系には近似的に鉛直 2 次元の構造をしているものが在る。寒冷前線付近の流れの様子には、寒冷前線に沿った方向に近似的に一樣なものが在る。図2-2参照。



問題を簡単にする為に密度を一定とする。密度とは単位体積当りの質量である。この場合には質量の保存則は体積の保存則と成る。鉛直 2 次元問題では、体積の保存則は、鉛直 2 次元断面 (即ち  $(x, z)$  面内) の面積の保存則に成る。この数式表現は 2 次元速度  $[u, w]$  の非発散式である。

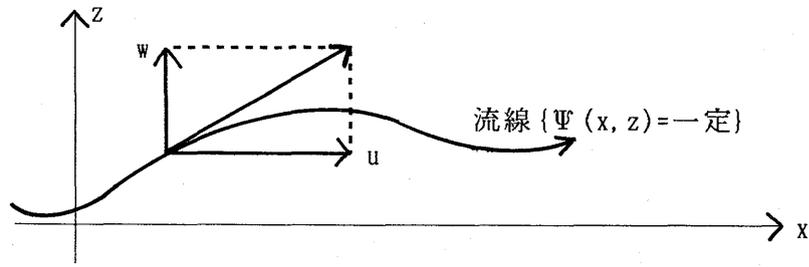
$$\partial u / \partial x + \partial w / \partial z = 0. \tag{2-2}$$

式 (2-2) より流線関数  $\Psi = \Psi(x, z)$  が存在して、2次元速度  $[u, w]$  は次の様に書ける。

$$u = \partial \Psi / \partial z, \quad w = -\partial \Psi / \partial x. \tag{2-3}$$

式 (2-3) を直接代入して、式 (2-2) の成立を確認する事ができる。逆に少しの計算の後に、式 (2-2) から式 (2-3) を導く事ができる。式 (2-3) は速度  $[u, w]$  が、流線関数  $\Psi$  の勾配ベクトル  $[\partial \Psi / \partial x, \partial \Psi / \partial z]$  に直交する事を意味する。 $\Psi$  の勾配ベクトルは、 $\Psi$  の等値線に直交する。従って速度  $[u, w]$  は、 $\Psi$  の等値線に接する。故に  $\Psi$  の等値線、即ち  $\{\Psi(x, z) = \text{一定}\}$  の曲線が 2 次元鉛直断面内の  $(x, z)$  流線と成る。図2-3参照。

図2-3 [鉛直 2 次元流線]



鉛直 2 次元の仮定 (2-1) が成立する為には、地面の起伏  $h$  あるいは摩擦  $F$  や加熱  $H$  等の強制は  $y$  に依存してはならない。何故なら、これらの  $y$  依存性は速度の  $y$  方向の変化を惹起するからである。即ち  $h=h(x)$  と  $F=F(x, z)$  と  $H=H(x, z)$  である。地面の起伏や強制は強制領域 ( $-L < x < +L$ ,  $L$  は或る定数) にのみ存在すると仮定する。

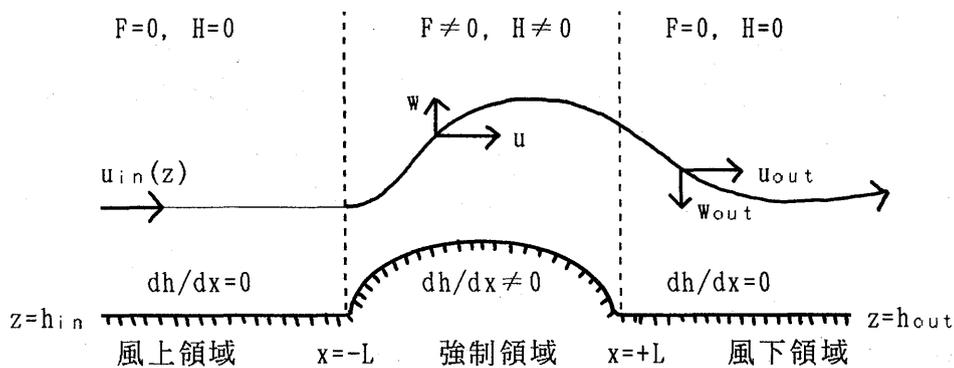
$$dh(x)/dx \neq 0, \quad F(x, z) \neq 0, \quad H(x, z) \neq 0 \quad \text{only for } -L < x < +L. \quad (2-4)$$

但し不等号は「必ず零でない」と言う意味ではなくて「零でない可能性が在る」と言う意味である。風上領域 ( $x < -L$ ) では流れは水平で鉛直方向にのみ変化すると仮定する。

$$u = u_{in}(z) > 0, \quad v = v_{in}(z), \quad w = 0 \quad \text{for } x < -L. \quad (2-5)$$

但し下添字  $in$  で風上領域を表した。風上領域とは地面の起伏や強制の影響の及ばない領域と言う意味である。また下添字  $out$  で風下領域 ( $+L < x$ ) を表す。風下領域には地面の起伏や強制は存在しない。しかし強制領域の強制の影響は風下領域にも及び得る。一般性を失う事なく  $h_{in}=0$  と仮定できる。また  $h_{out}$  は  $h_{in}$  に等しくない事もある。図2-4参照。

図2-4 [風上領域と強制領域と風下領域]

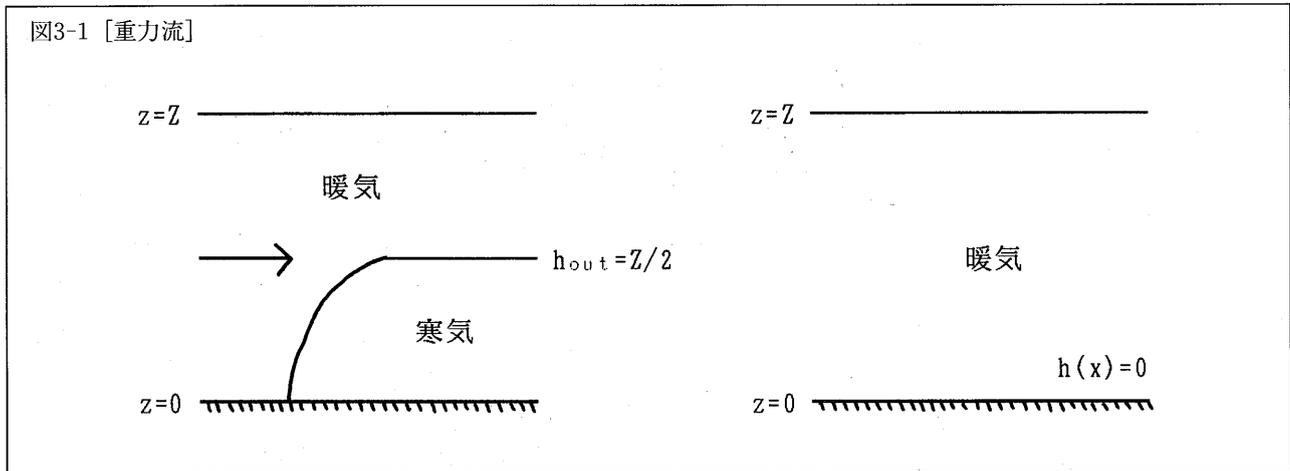


### 3 非線形問題

鉛直 2 次元で解けている問題の内に「重力流」と「下ろし風」が在る。これらは定常（流れの様子が時間的に変化しない）で非回転（地球の回転の効果を無視）の場合の解である。厳密に解ける数少ない問題の内の二つである。

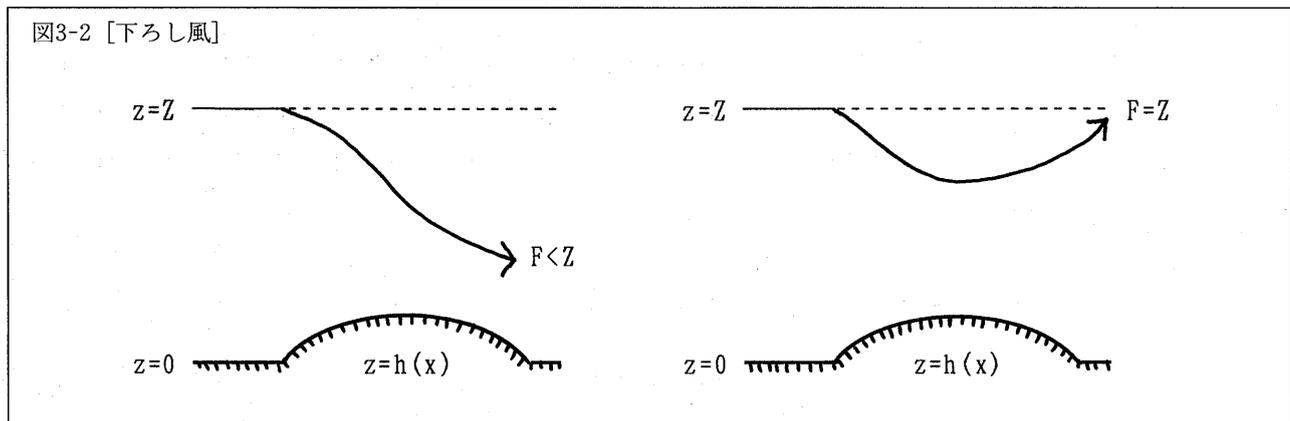
重力流は、重い寒気塊が軽い暖気の中を進行する現象である。問題を解くと 2 つの解が得られる。一つ目の解では、

遙か風下での寒気の厚み  $h_{out}$  が暖気の厚み  $Z$  の半分になる ( $h_{out} = Z/2$ )。二つ目の解では、寒気の厚み  $h(x)$  が零になる ( $h(x) = 0$ )。図3-1参照。



但し図3-1は寒気と共に動く（即ち寒気が止まって見える）座標系で描いてある。この場合には寒気の進行速度は暖気の進入速度に成る。

下ろし風は、山の風下で強い風が吹き降りて来る現象である。問題を解くと2つの解が得られる。一つ目の解では、山の風下での空気の厚み  $F$  が風上での空気の厚み  $Z$  より小さくなる ( $F < Z$ )、即ち風が吹き降りる。二つ目の解では、山の風下での空気の厚み  $F$  が風上での空気の厚み  $Z$  に等しくなる ( $F = Z$ )、即ち風は吹き降りない。図3-2参照。



試みに線形近似で同じ問題を解いて見る。線形近似とは図3-1や図3-2で言うと、 $h(x)$  が小さいとして、 $h(x)$  の高次の相乗積を無視する近似である。この場合には重力流では  $h(x) = 0$  に対応する解しか得られない。下ろし風では  $F = Z$  に対応する解しか得られない。重力流が存在する解 ( $h_{out} = Z/2$ ) や、下ろし風が起こっている解 ( $F < Z$ ) は出て来ない。

これと同様に線形近似では中小規模現象の姿を捉え損なう事に成りかねない。故に線形近似無しに、非線形問題を解かねばならない。

#### 4 定常・非回転・静水圧近似の場合

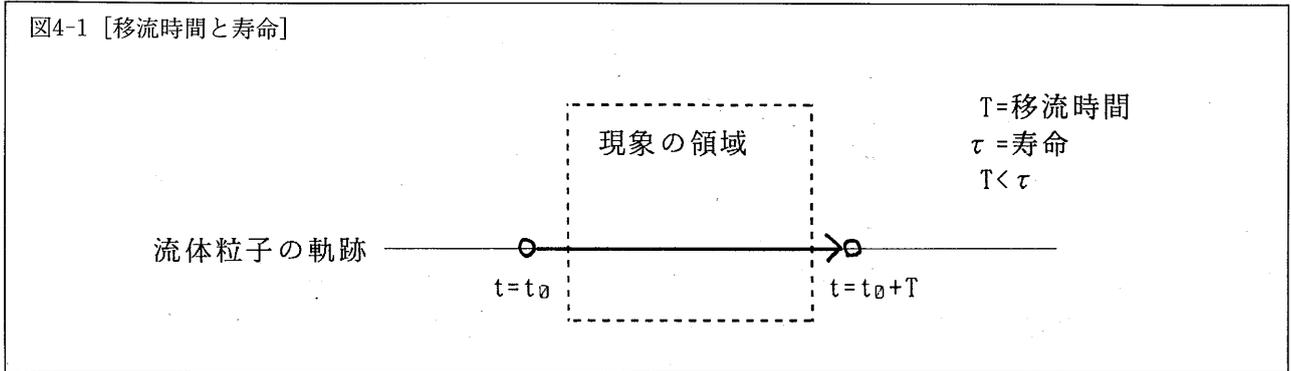
この報告では中小規模現象として水平距離の規模  $L$  が

$$10^4 \text{m} < L < 10^5 \text{m}, \tag{4-1}$$

の現象を考える。水平速度の規模は  $V = 10 \text{m/s}$  である。この時、式 (4-1) より移流の時間規模  $T = L/V$  は

$$10^3\text{s} < T < 10^4\text{s}, \tag{4-2}$$

と成る。これは数時間以下である。水平距離の規模 (4-1) の現象では、寿命  $\tau$  は通常は数時間よりも長い (或は長いものを考える)。即ち  $T < \tau$  である。従って流体粒子が現象の領域を通過する間に、現象が一生を終えてしまう事はない。図4-1参照。

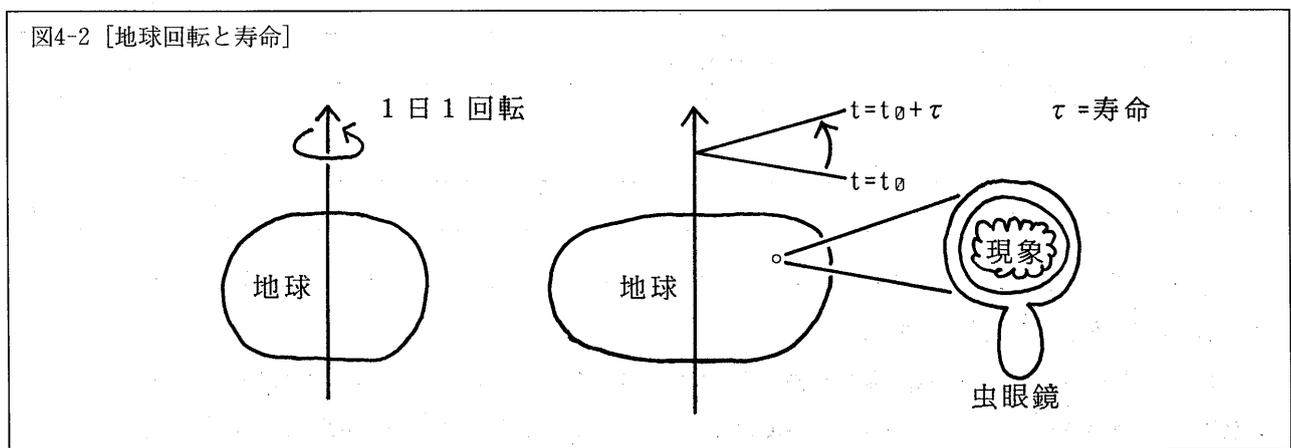


故に第1次近似で定常 (流れの様子が時間的に変化しない) として扱う事ができる。これは時刻を  $t$  として次式で表現される。

$$\partial/\partial t = 0. \tag{4-3}$$

細かく言うと中小規模擾乱の一生は、生成期と準定常期と消滅期に分けられる。「生成期」は擾乱が大規模な流れ中から生まれて来る時期、「準定常期」は成長した擾乱が比較的安定に存在し続ける時期、「消滅期」は擾乱が大規模な流れの中へと消えて行く時期である。第1次近似で定常と見なせるのは「準定常期」のみである。

地球は1日1回転する。水平距離の規模 (4-1) の現象では、寿命  $\tau$  は通常は1日よりも短い (或は短いものを考える)。即ち現象が一生を終える間に地球は1回転もしない。言い換えると現象は地球の回転を感じる前に一生を終える。図4-2参照。

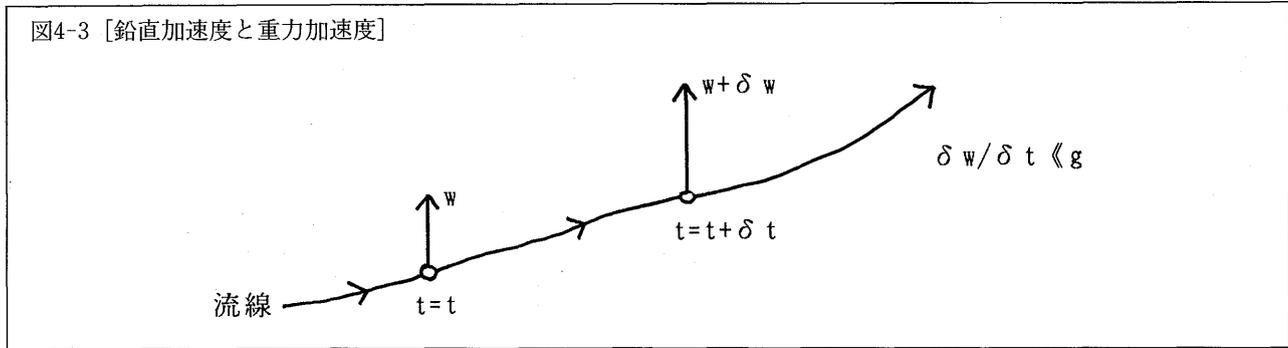


故に第1次近似で非回転 (地球の回転の効果が無い) として扱う事ができる。これはコリオリ因子を  $f$  として次式で表現される。コリオリ因子とは地球回転の大きさを表す尺度である。

$$f = 0. \tag{4-4}$$

水平距離の規模 (4-1) の現象では、鉛直速度  $w$  の規模は高々  $1\text{m/s}$  である。鉛直速度  $w$  の規模が  $10\text{m/s}$  に成るのは希で

ある。従って鉛直加速度  $dw/dt$  の規模は式 (4-2) の移流時間  $T$  を使って  $dw/dt \sim w/T < 10^{-3} m/s^2$  と評価される。鉛直下向きの重力加速度は  $g \sim 10 m/s^2$  である。即ち鉛直加速度  $dw/dt$  は重力加速度  $g$  に比べて遙かに小さい。図4-3参照。



故に第1次近似で鉛直加速度  $dw/dt$  は無視できる。言い換えると鉛直上向きの気圧傾度力が鉛直下向きの重力と釣り合っている。即ち静水圧平衡の状態 (1-1) に在る。これは圧力を  $P$ 、密度を  $\rho$  として次式で表現される。

$$(1/\rho) \partial P / \partial z + g = 0. \tag{4-5}$$

式 (4-5) の左辺の第1項が鉛直方向の気圧傾度力 (の負符号) である。第2項が重力 (の負符号) である。先ず初めに此の一番簡単な、定常・非回転・静水圧近似の場合を考える。

## 5 定常・非回転・静水圧近似の方程式

第5節では次の定常・非回転・静水圧近似の方程式を導く。

静水圧方程式

$$\partial \Phi / \partial z = g \theta / \theta_0 = \Theta \tag{5-1}$$

水平  $x$  方向の運動方程式

$$\partial (\Psi, u) / \partial (z, x) + \partial \Phi / \partial x = F, \quad u = \partial \Psi / \partial z, \tag{5-2}$$

熱方程式

$$\partial (\Psi, \Theta) / \partial (z, x) = H, \tag{5-3}$$

の3つである。静水圧方程式 (5-1) の  $\Phi$  はジオポテンシャルである。ジオポテンシャル  $\Phi$  の定義は後に (5-7) で与える。 $g$  は重力加速度である。 $\theta$  は温位である。

温位は温度に関連した概念である。温度は熱エネルギーの大きさの尺度である。熱強制 (加熱や冷却) が無くても、回りに仕事をして膨らめば、熱エネルギーを失い温度は下がる。回りから仕事をされて縮めば、熱エネルギーを得て温度は上がる。観測される温度 (現実的温度) は変化しても、この変化分は、膨らみや縮みに配分される。この膨らみや縮みに配分された温度を可能的温度と呼ぼう。「可能的温度」とは「現実的温度」に転化し得る温度と言う意味である。現実的温度が変化しても (熱強制が無ければ) 現実的温度と可能的温度の和は一定に保たれる。この和を温位と言い記号  $\theta$  で表す。

$$\text{温位} = \text{現実的温度} + \text{可能的温度}. \tag{5-4}$$

この定義より温位  $\theta$  は温度（現実的温度）と膨らみ・縮みに依存する。即ち温度と圧力（或は密度）の関数と成る。これの数式表現は次式で与えられる。

$$\theta = \text{温度} \cdot (P/P_0)^{-R/C}, \quad (5-5)$$

但し  $P$  は圧力であり  $P_0$  は圧力の標準の値である。  $R$  は大気的气体定数であり  $C$  は定圧比熱である。

静水圧方程式 (5-1) の  $\theta_0$  は温位  $\theta$  の標準の値である。  $g\theta/\theta_0$  を  $\Theta$  と書いた。以下この  $\Theta$  を単に「温位」と呼ぶ事にする。運動方程式 (5-2) の右辺の  $F$  は水平  $x$  方向の摩擦力である。左辺の第1項の

$$\partial(A, B)/\partial(z, x) = (\partial A/\partial z)(\partial B/\partial x) - (\partial B/\partial z)(\partial A/\partial x) \quad (5-6)$$

は  $(A, B)$  の  $(z, x)$  に関するヤコビアンである。熱方程式 (5-3) の右辺の  $H$  は加熱である。静水圧方程式 (5-1) と運動方程式 (5-2) と熱方程式 (5-3) の3式が（強制  $F$  と  $H$  は別にして）3つの未知変数 ( $\Psi, \Phi, \Theta$ ) に対する支配方程式と成る。

.....

以下に上の3式を導く。静水圧近似は式 (4-5) で表現される。大気の状態方程式 ( $P = \rho R \cdot \text{温度}$ ) より、 $\text{温度} = P/\rho R$  である。これと温位の式 (5-5) を使い、密度  $\rho$  を温位  $\theta$  と圧力  $P$  で表現すると式 (4-5) は次の形に成る。

$$\partial\Phi/\partial P = -R\theta P^{R/C-1}P_0^{-R/C} = -\Theta(R\theta_0/g)P^{R/C-1}P_0^{-R/C}. \quad (5-7)$$

但し  $\Phi = gz$  はジオポテンシャルである。ここで次の式を満足する圧力  $P$  の関数  $\xi(P)$  を考える。

$$d\xi/dP = -(R\theta_0/g)P^{R/C-1}P_0^{R/C}. \quad (5-8)$$

式 (5-8) を式 (5-7) に代入して次式を得る。

$$\partial\Phi/\partial\xi = \Theta. \quad (5-9)$$

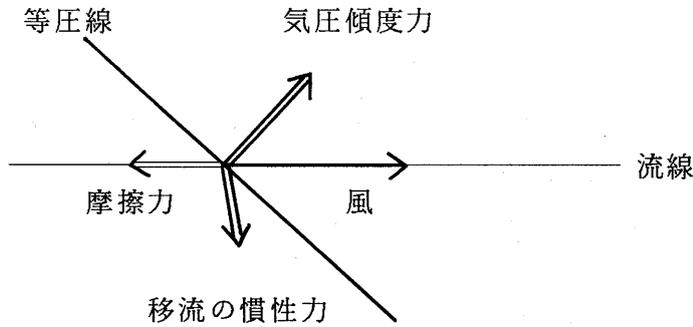
条件  $\xi(P_0) = 0$  を満たす式 (5-8) の解は次式で与えられる。

$$\xi = (C\theta_0/g) \{1 - (P/P_0)^{R/C}\}. \quad (5-10)$$

この  $\xi$  は（少なくとも下部対流圏では）真高度  $z$  に良く似た振る舞いをする。以下この  $\xi$  を擬高度と呼び、改めて  $z$  と書いて鉛直座標とする。式 (5-9) の  $\xi$  を  $z$  と書き直して静水圧方程式 (5-1) と成る。第4節迄に述べた鉛直座標  $z$  は式 (5-10) の擬高度であると解釈する。

定常なので流れの様子は時間的に変化しない。即ち各々の点  $(x, y, z)$  で力が釣り合っている。水平方向には「移流による慣性力」と「気圧傾度力」と「摩擦力」が釣り合っている。図5-1参照。

図5-1 [水平方向の力の釣り合い]



水平方向の力の釣合： 慣性力 + 気圧傾度力 + 摩擦力 = 0. (5-11)

慣性力は、或点の上流から運ばれて来る運動の勢いが、其点に及ぼす力である。これは速度方向への速度勾配から生まれる。速度方向への速度勾配がなければ、或点の上流から運ばれてくる運動の勢いは、其点のものと同じである。従って其点は力を受けない。或点が力を感じるのは、其点が其点とは違う運動の勢いを受け取るからである。慣性力の数式表現は次式で与えられる。

慣性力 = -速度・速度勾配. (5-12)

気圧傾度力は気圧勾配から生まれる。これはジオポテンシャルΦで表現すればシオポテンシャルΦの勾配（の負符号）と成る。気圧傾度力の数式表現は次式で与えられる。

気圧傾度力 = -ジオポテンシャル勾配. (5-13)

水平x方向の力の釣り合いの数式表現が、水平x方向の運動方程式である。鉛直2次元の定義式(2-1)に注意して、式(5-11)と式(5-12)と式(5-13)より、これは次の様に成る。

$$u \partial u / \partial x + w \partial u / \partial z + \partial \Phi / \partial x = F. \quad (5-14)$$

左辺の第1項と第2項が移流項（-慣性力）である。第3項が圧力項（-気圧傾度力）である。右辺は強制項（摩擦力）である。流線関数Ψの式(2-3)を使い、式(5-14)の移流項を流線関数Ψで表現して水平x方向の運動方程式(5-2)と成る。同様に水平y方向の力の釣り合いの数式表現が、水平y方向の運動方程式である。これは次の様に書ける。

$$\partial (\Psi, v) / \partial (z, x) + \partial \Phi / \partial y = G. \quad (5-15)$$

但しG=G(x,z)はy方向の摩擦力である。風上条件式(2-5)とy方向の運動方程式(5-15)より風上領域でy方向の気圧傾度力は零と成る。

$$\partial \Phi_{in} / \partial y = 0. \quad (5-16)$$

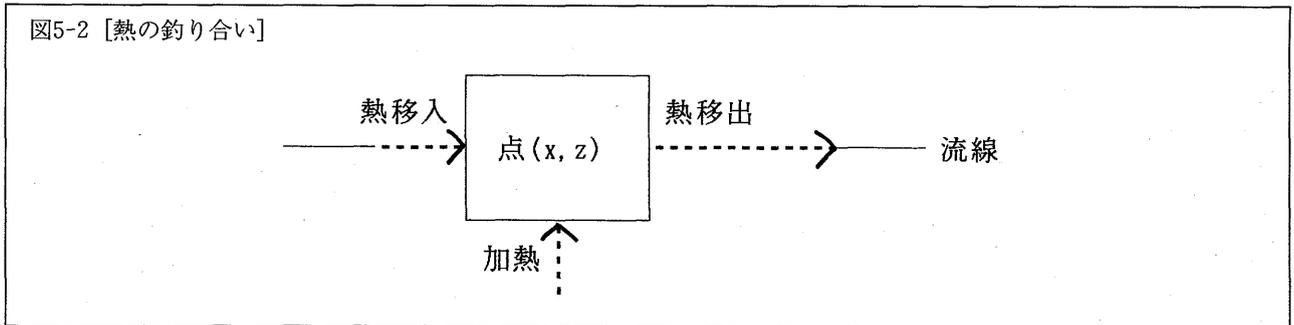
x方向の運動方程式(5-2)をyで微分し、Ψ=Ψ(x,z)とF=F(x,z)がyに依存しない事に注意して∂²Φ/∂y∂xは零に成る。これより∂Φ/∂yは風上領域での値に等しく成る。

$$\partial \Phi / \partial y = \partial \Phi_{in} / \partial y. \quad (5-17)$$

式 (5-16) と式 (5-17) より  $\partial \Phi / \partial y$  は零に成るが、静水圧方程式 (5-1) より  $\partial \Theta / \partial y$  も零に成る。

$$\partial \Phi / \partial y = \partial \Theta / \partial y = 0. \tag{5-18}$$

定常なので流れは熱的に釣り合っている (温度は時間的に変化しない)。即ち或る点  $(x, z)$  の「熱移流」(流れが運んでくる熱と、流れが運び去る熱との差) と、此の点  $(x, y)$  での「加熱」(熱強制) が釣り合っている。図5-2参照。



熱の釣り合い: 熱移流 + 加熱 = 0. (5-19)

熱移流は速度方向への温位勾配から生まれる。速度方向への温位勾配が無ければ、或点に上流から運ばれて来る温位は其点の物と同じである。従って其点は暖かさも冷たさも感じない。或点が熱 (或は冷) を感じるのは、其点が其点とは違う温位を受け取るからである。熱移流の数式表現は次式で与えられる。

$$\text{熱移流} = -\text{速度} \cdot \text{温位勾配}. \tag{5-20}$$

式 (5-20) を代入して式 (5-19) の数式表現は次の熱方程式に成る。

$$u \partial \Theta / \partial x + v \partial \Theta / \partial y + w \partial \Theta / \partial z = H. \tag{5-21}$$

左辺は熱移流 (の負符号) を表す。右辺は加熱である。式 (5-18) を使い、更に流線関数  $\Psi$  の式 (2-3) を使って熱移流項を流線関数  $\Psi$  で表現し、熱方程式 (5-21) は式 (5-3) の形に成る。

風上条件式 (2-5) より風上領域では  $(\Psi, \Theta, \Phi)$  は鉛直座標  $z$  にのみ依存する。

$$\Psi_{in} = \Psi_{in}(z), \quad \Theta_{in} = \Theta_{in}(z), \quad \Phi_{in} = \Phi_{in}(z). \tag{5-22}$$

これらの条件 (及び上部と下部の境界条件) の下に3式 (5-1, 2, 3) を解いて  $(\Psi, \Theta, \Phi)$  を求める事ができる。もう一つの未知変数である  $y$  方向の速度  $v$  は  $(\Psi, \Theta, \Phi)$  が解けた後で、 $y$  方向の運動方程式 (5-15) より求められる。

## 6 温位・エネルギー・渦位の保存則

第6節では第2部の具体的応用で度々引用される3つの基本保存式を導く。

温位  $\Theta$  の保存式

$$\Theta = \Theta[\Psi, x] = \Theta_{in}[\Psi] + \int_{-z}^z dx H/u. \tag{6-1}$$

エネルギーBの保存式

$$B = B[\Psi, x] = B_{in}[\Psi] + \int_{-\infty}^x dx (F - zH/u),$$

$$B = (\partial \Psi / \partial z)^2 / 2 + \Phi - z\Theta, \quad (6-2)$$

渦位Qの保存式

$$Q = Q[\Psi, x] = Q_{in}[\Psi] + (\partial / \partial \Psi) \int_{-\infty}^x dx (F - zH/u),$$

$$Q = \partial^2 \Psi / \partial z^2 - z \partial \Theta / \partial \Psi \quad (6-3)$$

の3つである。上の保存式 (6-1, 2, 3) の積分は、流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って行う。積分は流線関数  $\Psi$  と水平座標  $x$  に依存する。風上領域では加熱や摩擦の強制は無い ( $F=H=0$ )。従って温位  $\Theta$  もエネルギー  $B$  も渦位  $Q$  も流線関数  $\Psi$  だけに依存する。即ち流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って保存される。

$$\Theta = \Theta_{in}[\Psi] \quad \text{for } x < -L. \quad (6-4a)$$

$$B = B_{in}[\Psi] \quad \text{for } x < -L. \quad (6-4b)$$

$$Q = Q_{in}[\Psi] \quad \text{for } x < -L. \quad (6-4c)$$

強制領域では、温位  $\Theta$  もエネルギー  $B$  も渦位  $Q$  も、強制の為に流線に沿って値が変わる。即ち温位  $\Theta$  もエネルギー  $B$  も渦位  $Q$  も、流線関数  $\Psi$  だけでなく水平座標  $x$  にも依存する。

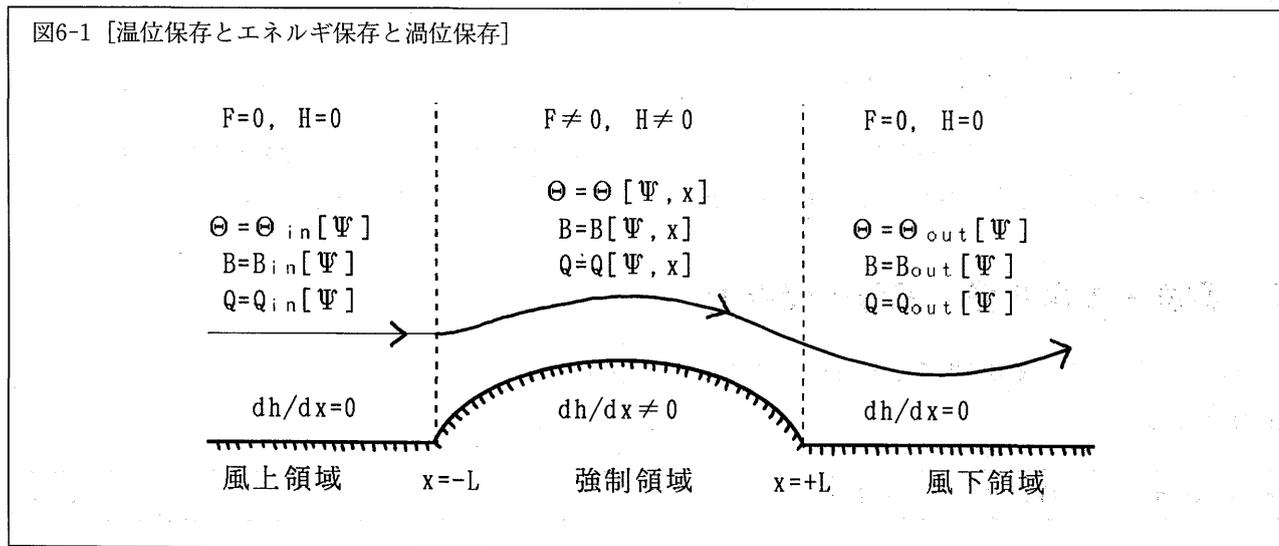
これを  $\Theta = \Theta[\Psi, x]$  etc と書いた。風下領域では再び強制は無い ( $F=H=0$ )。従って温位  $\Theta$  もエネルギー  $B$  も渦位  $Q$  も再び流線関数  $\Psi$  だけに依存する。即ち流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って保存される。

$$\Theta = \Theta_{out}[\Psi] = \Theta_{in}[\Psi] + \int_{-L}^{+L} dx H/u \quad \text{for } +L < x. \quad (6-5a)$$

$$B = B_{out}[\Psi] = B_{in}[\Psi] + \int_{-L}^{+L} dx (F - zH/u) \quad \text{for } +L < x. \quad (6-5b)$$

$$Q = Q_{out}[\Psi] = Q_{in}[\Psi] + (d/d\Psi) \int_{-L}^{+L} dx (F - zH/u) \quad \text{for } +L < x. \quad (6-5c)$$

式 (6-5) の積分は勿論流線関数  $\Psi$  にのみ依存する。図6-1参照。



式 (6-1) の温位  $\Theta$  (掛ける  $\theta_0/g$ ) は現実的温度 (観測される温度) と可能的温度 (膨らみ・縮みに配分される温度)

の和であった。「可能的温度」とは「現実的温度」に転化し得ると言う意味であった。強制が無い場合でも、現実的温度は変化し得た。しかしこの変化分は可能的温度に配分された。そして現実的温度と可能的温度の和である温位 $\Theta$  (掛ける $\theta_0/g$ ) は流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って保存される。

式 (6-2) のエネルギー  $B = (\partial \Psi / \partial z)^2 / 2 + \Phi - z\Theta$  の第1項  $[(\partial \Psi / \partial z)^2 / 2]$  は現実的エネルギー (運動エネルギー) である。第2項と第3項の和  $[\Phi - z\Theta]$  は可能的エネルギーである。「可能的エネルギー」とは「現実的エネルギー」に転化し得ると言う意味である。強制が無い場合でも、現実的エネルギーは変化し得る。しかしこの変化分は可能的エネルギーに配分される。そして現実的エネルギーと可能的エネルギーの和であるエネルギー $B$ は流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って保存される。

式 (6-3) の渦位  $Q = \partial^2 \Psi / \partial z^2 - z \partial \Theta / \partial \Psi$  の第1項  $[\partial^2 \Psi / \partial z^2]$  は現実的渦度 (本当の渦度) である。第2項  $[-z \partial \Theta / \partial \Psi]$  は可能的渦度である。「可能的渦度」とは「現実的渦度」に転化し得ると言う意味である。強制が無い場合でも、現実的渦度は変化し得る。しかしこの変化分は可能的渦度に配分される。そして現実的渦度と可能的渦度の和である渦位 $Q$ は流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って保存される。

.....  
以下に保存式 (6-1, 2, 3) を導く。ヤコビアン of 次の性質

$$\{\partial (A, B) / \partial (C, D)\} \{\partial (C, D) / \partial (E, F)\} = \partial (A, B) / \partial (E, F) \quad (6-6)$$

を使い熱方程式 (5-3) は次の形に変形できる。

$$\partial (\Psi, \Theta) / \partial (\Psi, x) = H \partial (z, x) / \partial (\Psi, x). \quad (6-7)$$

式 (6-7) の左辺は温位 $\Theta$ を $\Psi$ と $x$ の関数と見て、 $x$ で偏微分する事を意味する。流線関数 $\Psi$ の式 (2-3) に注意して右辺は $H/u$ に成る。即ち式 (6-7) は次の様に書き直せる。

$$\partial \Theta [\Psi, x] / \partial x = H/u. \quad (6-8)$$

但し温位 $\Theta(x, z)$ を $\Psi$ と $x$ の関数と見直して $\Theta[\Psi, x]$ と書いた。式 (6-8) が意味を持つ為には $x$ 方向の速度成分 $u = \partial \Psi / \partial z = \partial (\Psi, x) / \partial (z, x)$ が至る所で正でなければならない。以下これを仮定する。式 (6-8) を流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って $-\infty$ から $x$ 迄積分すると温位保存式 (6-1) が得られる。風上領域での温位 $\Theta$ は鉛直座標 $z$ のみに依存する。流線関数 $\Psi$ も鉛直座標 $z$ のみに依存する。その結果、温位 $\Theta$ は流線関数 $\Psi$ の関数に成る。即ち流線に沿って保存される。これを $\Theta_{in} = \Theta_{in}[\Psi]$ と書いた。

$$\Theta_{in}(z) = \Theta_{in}(\Psi_{in}^{-1}(\Psi_{in}(z))) = (\Theta_{in} \cdot \Psi_{in}^{-1})[\Psi] = \Theta_{in}[\Psi]. \quad (6-9)$$

次に運動方程式 (5-2) に水平速度 $u = \partial \Psi / \partial z$ を掛け、静水圧方程式 (5-1) と熱方程式 (5-3) を使い次のエネルギー (正確にはエネルギー流束密度, ベルヌウイ関数)  $B$ の式が得られる。

$$\partial (\Psi, B) / \partial (z, x) = uF - zH, \quad B = (\partial \Psi / \partial z)^2 / 2 + \Phi - z\Theta. \quad (6-10)$$

熱方程式 (5-3) から温位保存式 (6-1) を導いたのと同様にして、エネルギーの式 (6-10) を流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って $-\infty$ から $x$ 迄積分してエネルギー保存式 (6-2) が得られる。式 (6-9) の風上領域の温位 $\Theta_{in}(z)$ と同様に、 $B_{in}(z)$ を $\Psi_{in}(z)$ の関数と見て $B_{in}[\Psi]$ と書いた。

$$B_{in}(z) = B_{in}(\Psi_{in}^{-1}(\Psi_{in}(z))) = (B_{in} \cdot \Psi_{in}^{-1})[\Psi] = B_{in}[\Psi]. \quad (6-11)$$

最後に運動方程式 (5-2) を鉛直座標 $z$ で微分して次の渦位 $Q$ の式が得られる。

$$\partial(\Psi, Q)/\partial(z, x) = u(\partial/\partial\Psi)(F - z\partial\Theta/\partial x), \quad Q = \partial^2\Psi/\partial z^2 - z\partial\Theta/\partial\Psi, \quad (6-12)$$

但し $\Psi$ での微分は水平座標 $x$ を固定して行う。熱方程式 (5-3) から温位保存式 (6-1) を導いたのと同じ様にして、渦位の式 (6-12) を流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って $-\infty$ から $x$ 迄積分して渦位保存式 (6-3) が得られる。式 (6-9) の風上領域の温位 $\Theta_{in}(z)$ と同様に、 $Q_{in}(z)$ を $\Psi_{in}(z)$ の関数と見て $Q_{in}[\Psi]$  と書いた。

$$Q_{in}(z) = Q_{in}(\Psi_{in}^{-1}(\Psi_{in}(z))) = (Q_{in} \cdot \Psi_{in}^{-1})[\Psi] = Q_{in}[\Psi]. \quad (6-13)$$

## 7 渦位エネルギー関係式

第7節では渦位 $Q$ とエネルギー $B$ の間に成り立つ次の関係式を導く。

$$Q[\Psi, x] = \partial B[\Psi, x]/\partial\Psi. \quad (7-1)$$

式(7-1)の微分は、エネルギー $B$ を流線関数 $\Psi$ と水平座標 $x$ の関数を見て、流線関数 $\Psi$ で偏微分する事を意味する。強制領域 $(-L < x < +L)$ の外では渦位 $Q$ もエネルギー $B$ も流線関数 $\Psi$ にのみ依存する。即ち流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿っての保存量と成る。この場合は関係式(7-1)は次の形に簡単化される。

$$Q[\Psi] = dB[\Psi]/d\Psi. \quad (7-2)$$

強制が無い( $F=H=0$ )場合には全領域で関係式(7-2)が成り立つ。

以下に関係式(7-1)を導く。式(6-2)のエネルギー $B$ を鉛直座標 $z$ で微分して次式と成る。

$$\partial B/\partial z = (\partial\Psi/\partial z)\partial^2\Psi/\partial z^2 + \partial\Phi/\partial z - \Theta - z\partial\Theta/\partial z. \quad (7-3)$$

一方、 $B=B[\Psi, x]$  を鉛直座標 $z$ で微分して次式と成る。

$$\partial B[\Psi, x]/\partial z = (\partial\Psi/\partial z)\partial B[\Psi, x]/\partial\Psi. \quad (7-4)$$

ここで $\partial\Theta/\partial z = (\partial\Psi/\partial z)\partial\Theta/\partial\Psi$ に注意し、更に静水圧方程式(5-1)を代入して、式(7-3)と式(7-4)よりエネルギー $B$ の $\Psi$ 導関数は次の様に成る。

$$\partial B/\partial\Psi = \partial^2\Psi/\partial z^2 - z\partial\Theta/\partial\Psi. \quad (7-5)$$

この式(7-5)と渦位 $Q$ の式(6-3)より、関係式(7-1)が得られる。

エネルギー $B$ は運動エネルギー(現実的エネルギー) $u^2/2 = (\partial\Psi/\partial z)^2/2$ とポテンシャルエネルギー(可能的エネルギー) $\Phi - z\Theta$ の和である。

$$B = K + (\Phi - z\Theta), \quad K = u^2/2. \quad (7-6)$$

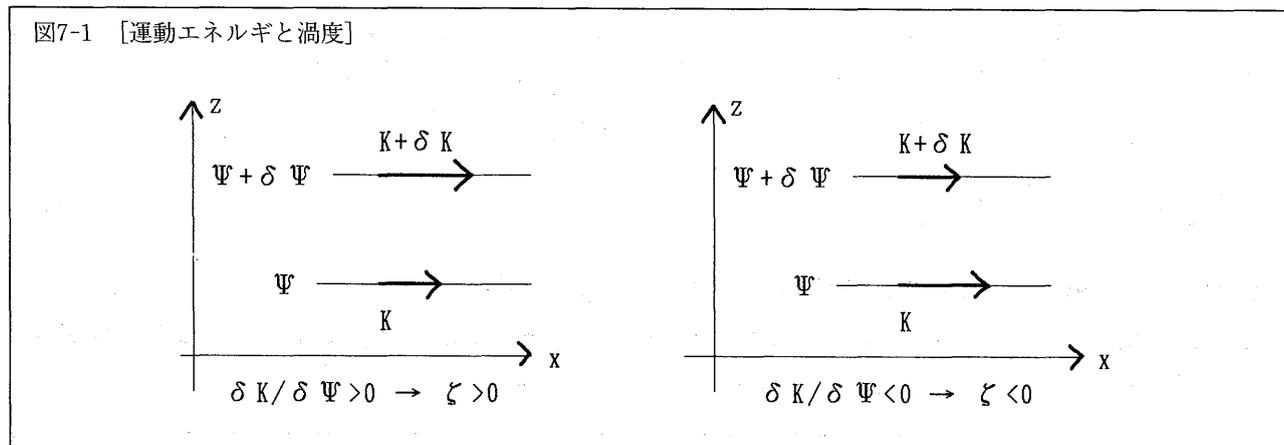
同様に渦位 $Q$ は渦度(現実的渦度) $\partial u/\partial z = \partial^2\Psi/\partial z^2$ と可能的渦度 $-z\partial\Theta/\partial\Psi$ の和である。

$$Q = \zeta - z \partial \Theta / \partial \Psi, \quad \zeta = \partial u / \partial z. \tag{7-7}$$

現実的エネルギー  $K$  を  $\Psi$  と  $x$  の関数と見て流線関数  $\Psi$  で微分する事により次の事が分かる。即ち現実的渦度  $\zeta$  は現実的エネルギー  $K$  の  $\Psi$  導関数である。

$$\partial K / \partial \Psi = (\partial z / \partial \Psi) (\partial K / \partial z) = (1/u) u \partial u / \partial z = \zeta. \tag{7-8}$$

運動エネルギー  $K$  の、流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に垂直な方向の勾配は速度シアに関する。従って、 $K$  の  $\Psi$  導関数が  $\zeta$  に関する事は予想のつく事である。図7-1参照。



式(7-8) は現実的部分に対して成り立つ関係式である。渦位エネルギー関係式(7-1)は、これと同じ関係が可能的部分も含めて成立する事を示している。

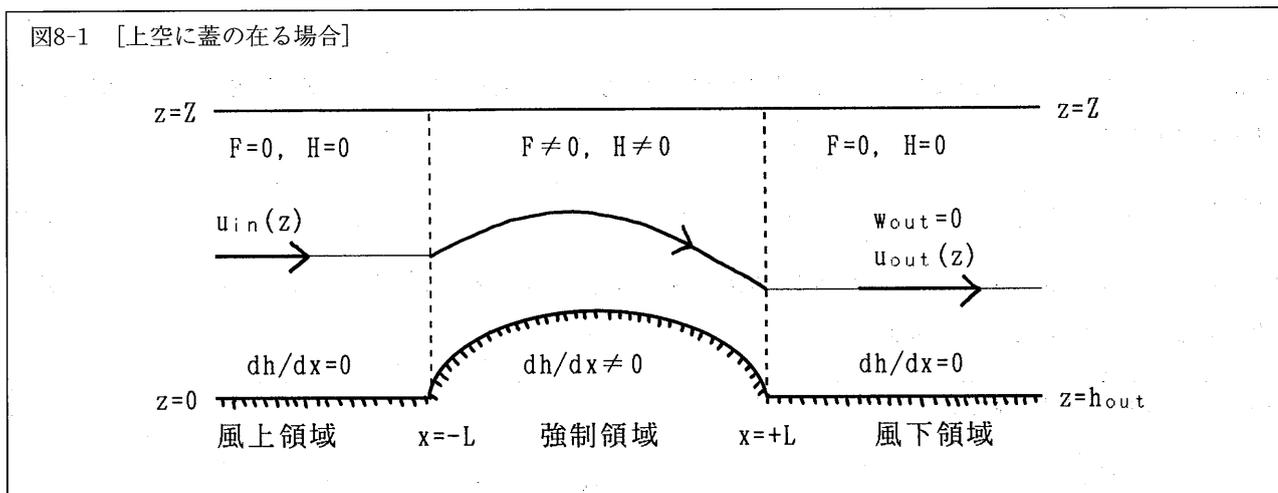
## 8 いくつかの一般的性質

温位保存式(6-1)とエネルギー保存式(6-2)と渦位保存式(6-3)より、温位  $\Theta$  とエネルギー  $B$  と渦位  $Q$  は強制領域  $(-L < x < +L)$  の外では流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って保存される。即ち流線関数  $\Psi$  のみの関数と成る。特に渦位方程式(6-3)は流線関数  $\Psi$  に対する微分方程式を与える。

$$\partial^2 \Psi / \partial z^2 = Q[\Psi] + z d\Theta[\Psi] / d\Psi. \tag{8-1}$$

水平座標  $x$  は式(8-1)に陽には含まれていない。従ってもしも外的条件が  $x = x_1$  と  $x = x_2$  で同じならば、解  $\Psi$  も  $x = x_1$  と  $x = x_2$  で同じに成る。例えば上空  $z = Z$  に硬い蓋がある場合 ( $z > Z$  で安定度が無限大の場合) を考える。この場合の境界条件は  $\Psi(x, Z) = \Psi_{in}(Z)$  および  $\Psi(x, h) = \Psi_{in}(0)$  である。これらは水平座標  $x$  に依存しない。故に強制領域の外では流線関数  $\Psi$  は水平座標  $x$  に依存せず、流れは水平と成る。図8-1参照。

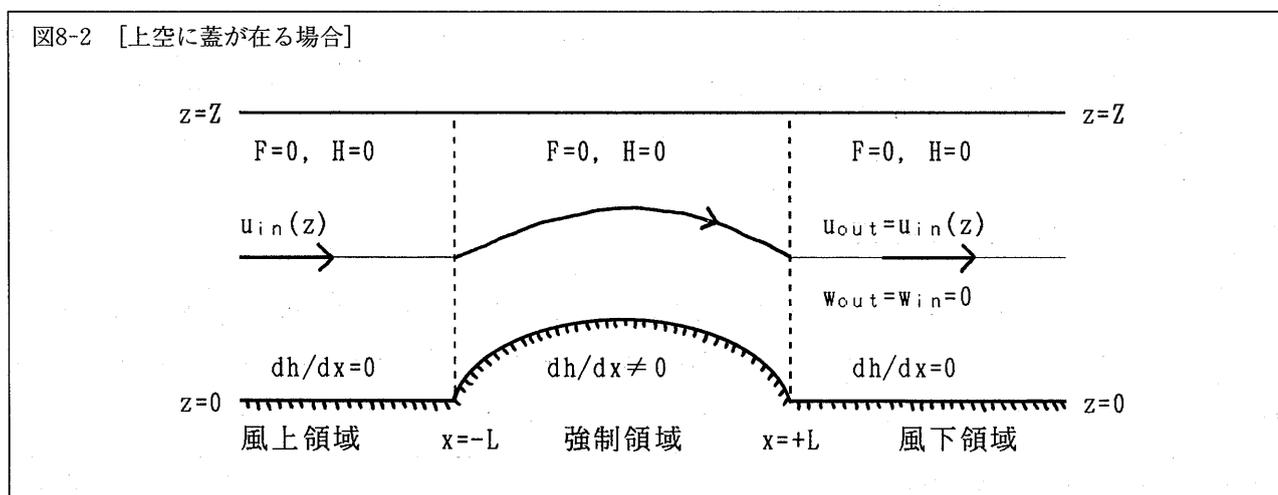
図8-1 [上空に蓋の在る場合]



$$\Psi_{out} = \Psi_{out}(z) \quad \text{if upper rigid lid.} \tag{8-2}$$

更に強制領域で摩擦Fも加熱Hもない(即ち地面の起伏hのみが在る)場合を考える。この場合には、温位保存式(6-1)と渦位保存式(6-3)より、 $\Psi$ の微分方程式(8-1)は風上領域( $x < -L$ )と風下領域( $+L < x$ )で同じ形に成る。その結果( $h_{in}$ と $h_{out}$ が等しい場合には)風下領域の流れは風上領域の流れと同じに成る。図8-2参照。

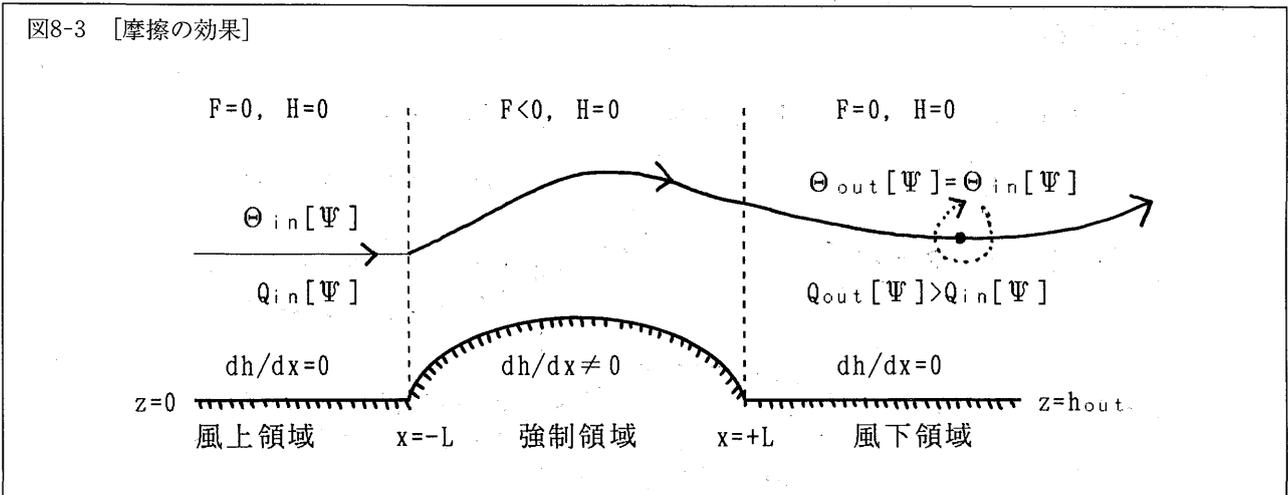
図8-2 [上空に蓋が在る場合]



$$\Psi_{out} = \Psi_{in}(z) \quad \text{if upper rigid lid and } F = H = 0. \tag{8-3}$$

次に摩擦は在る( $F < 0$ )が、加熱が無い( $H = 0$ )場合を考える(上空の蓋は在っても無くても構わない)。加熱Hは無いので温位保存式(6-1)より風下領域の温位は風上領域の温位に等しい。即ち $\Theta_{out}[\Psi] = \Theta_{in}[\Psi]$ 。摩擦Fは地面の存在に基づくとすれば $F < 0$ は鉛直座標zの増加関数と仮定できる。水平速度 $u = \partial \Psi / \partial z$ は至る所で正と仮定されている。この場合 $\partial F / \partial \Psi$ は正と成る。そして渦位保存式(6-3)より風下領域での渦位は風上領域での渦位よりも大きく成る。図8-3参照。

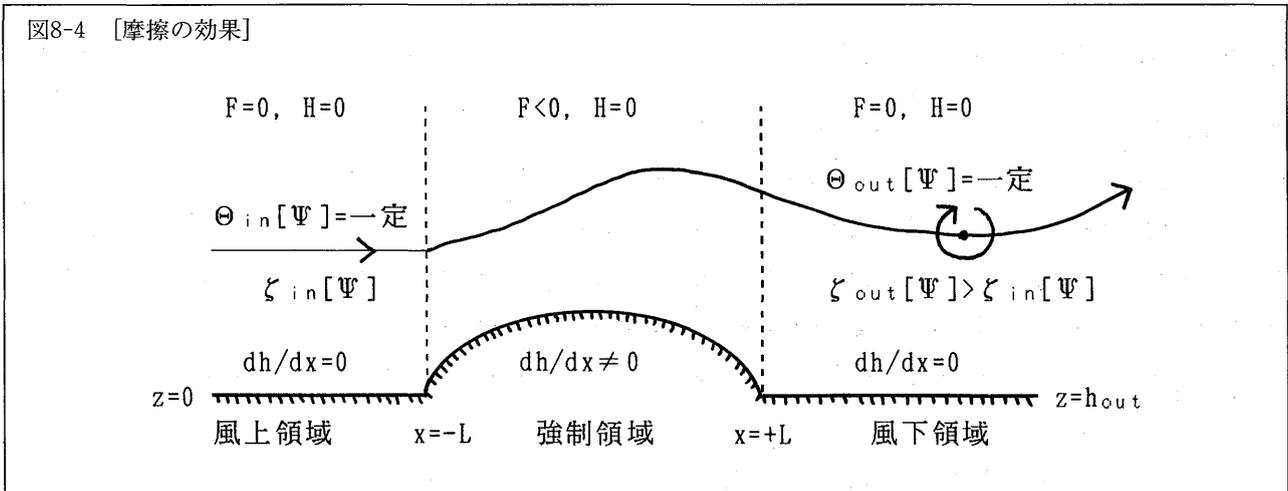
図8-3 [摩擦の効果]



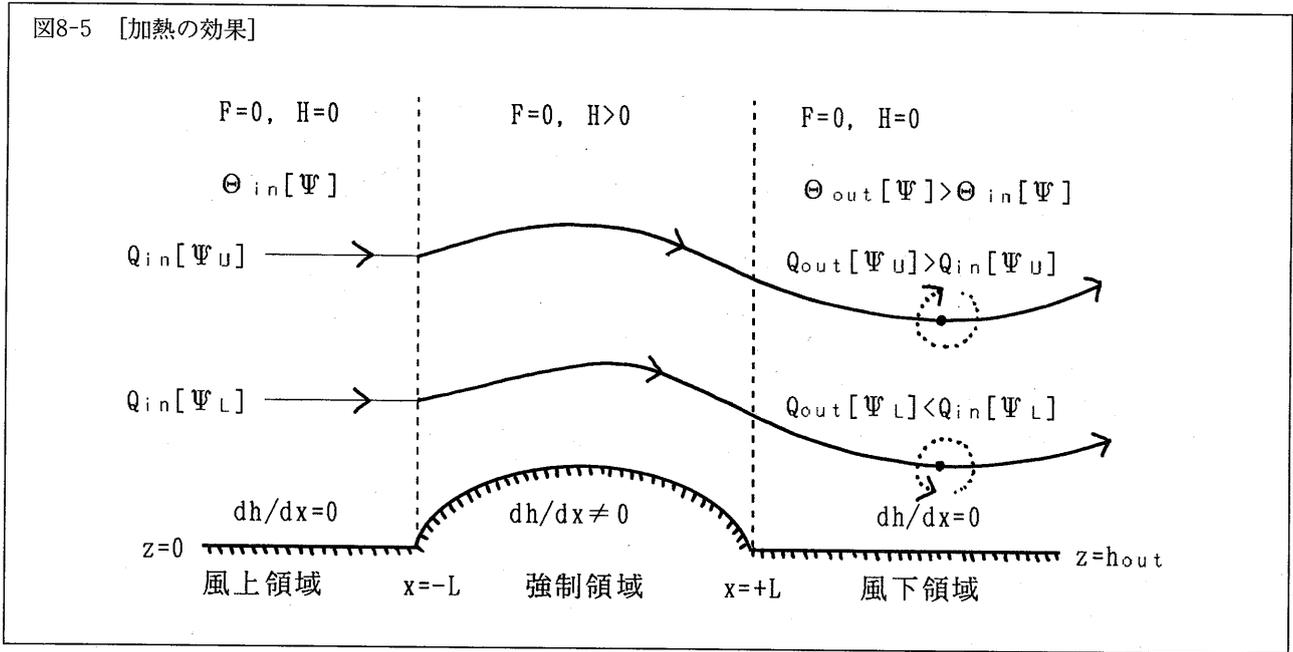
$$Q_{out}[\Psi] = Q_{in}[\Psi] + (d/d\Psi) \int_{-L}^{+L} dx F > Q_{in}[\Psi] \quad \text{if } F < 0 \text{ and } H = 0. \quad (8-4)$$

特に風上領域が中立 ( $\Theta_{in}[\Psi] = \text{一定}$ ) の場合には  $d\Theta_{in}/d\Psi = d\Theta_{out}/d\Psi = 0$  と成る。この場合には  $\Psi$  の微分方程式 (8-1) より渦度  $\zeta = \partial u / \partial z = \partial^2 \Psi / \partial z^2$  が摩擦 ( $F < 0$ ) によって増加する事に成る。図8-4参照。

図8-4 [摩擦の効果]



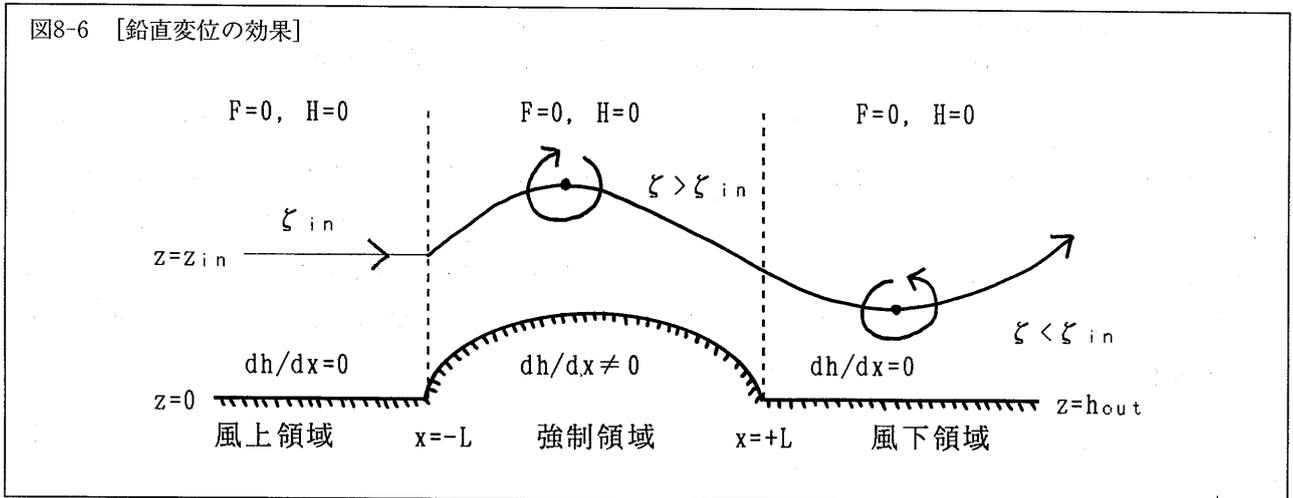
次に加熱は在る ( $H > 0$ ) が摩擦は無い ( $F = 0$ ) 場合を考える (上空の蓋は在っても無くても構わない)。加熱が在るので風下領域の温位は風上領域の温位よりも大きい。即ち  $\Theta_{out}[\Psi] > \Theta_{in}[\Psi]$ 。地面からの加熱  $H$  を考える。この加熱は鉛直座標  $z$  の急激な減少関数と仮定できる。水平速度  $u$  は至る所で正で鉛直方向に大きな変動は無いと仮定する。この仮定の下で  $zH/u$  は正で或る高さで最大値を取る。従って渦位保存式 (6-3) より風下領域の渦位は、下層で風上領域の渦位よりも小さく、上層で風上領域の渦位よりも大きく成る。図8-5参照。



$$Q_{out}[\Psi] = Q_{in}[\Psi] - (d/d\Psi) \int_{-L}^{+L} dx z H/u < Q_{in}[\Psi] \quad \text{in the lower layer,}$$

$$Q_{out}[\Psi] = Q_{in}[\Psi] - (d/d\Psi) \int_{-L}^{+L} dx z H/u > Q_{in}[\Psi] \quad \text{in the upper layer, if } F = 0 \text{ and } H > 0. \quad (8-5)$$

最後に加熱も摩擦も無い場合 ( $F=H=0$ ) を考える (蓋は在っても無くても構わない)。強制領域に或るのは地面の起伏  $h$  だけとする。この場合には、温位  $\Theta$  とエネルギー  $B$  と渦位  $Q$  は至る所で保存量と成る。即ち  $\Theta = \Theta_{in}[\Psi]$  と  $B = B_{in}[\Psi]$  と  $Q = Q_{in}[\Psi]$ 。流線関数  $\Psi$  の微分方程式 (8-1) は至る所で同じ形で成立する。風上領域では成層は安定 ( $d\Theta_{in}/dz > 0$ ) で水平速度  $u = \partial\Psi/z$  が至る所で正と仮定する。この仮定の下で  $d\Theta/d\Psi$  は至る所で正と成る。この場合には  $\Psi$  の微分方程式 (8-1) より、上方変位は渦度  $\zeta = \partial u/\partial z = \partial^2\Psi/\partial z^2$  の増加を伴い、下方変位は渦度の減少を伴う。図8-6参照。



$$\zeta = \partial^2\Psi/\partial z^2 = d^2\Psi_{in}/dz^2 + (z-z_{in})d\Theta/d\Psi > d^2\Psi_{in}/dz^2 = \zeta_{in} \quad \text{if } F = H = 0 \text{ and } z > z_{in},$$

$$\zeta = \partial^2\Psi/\partial z^2 = d^2\Psi_{in}/dz^2 + (z-z_{in})d\Theta/d\Psi < d^2\Psi_{in}/dz^2 = \zeta_{in} \quad \text{if } F = H = 0 \text{ and } z < z_{in}.$$

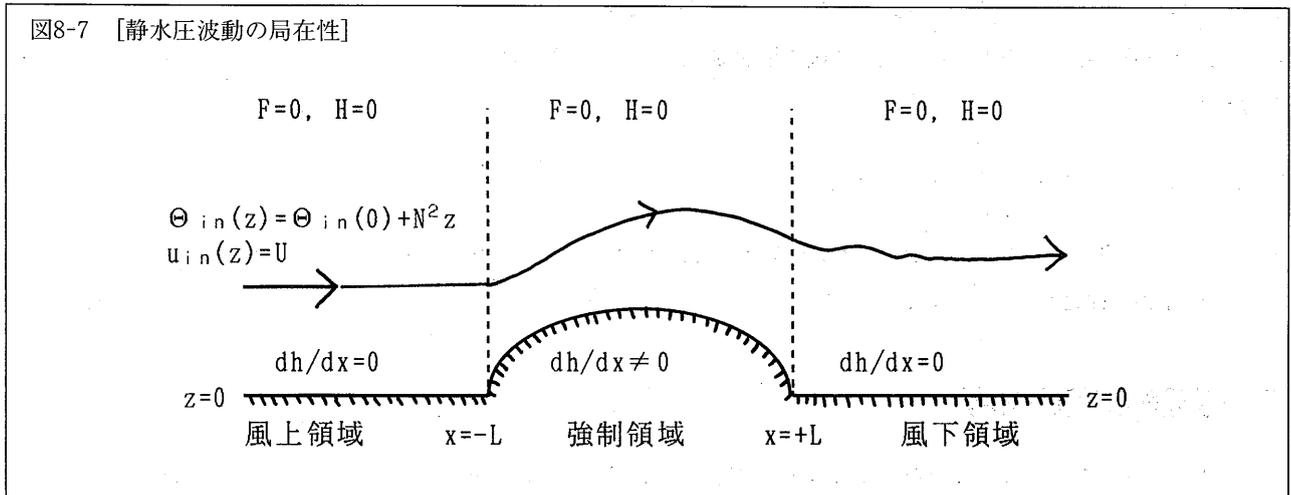
(8-6)

但し  $z_{in}$  は点  $(x, z)$  を通る流線の風上領域での高度である。

非強制 (加熱  $H$  や摩擦  $F$  が零) で上空に蓋が在る場合 ( $z > Z$  で安定度が無限大の場合) には「波は山の上にはしか存在しない」事を先((8-3))に示した。上空に蓋が在るのは「或る高度  $z=Z$  で安定度が大きく変わっている場合」の一つの例である。逆に「安定度が鉛直方向にあまり大きくは変化しない場合」を考える。これの一つの例は、安定度が一定の場合である。風上領域の風速も一定とする。

$$d\Theta_{in}(z)/dz = N^2 = \text{const.}, \quad u_{in}(z) = U = \text{const.} \quad (8-7)$$

この場合にも「波は山の上以外には殆ど存在しない」事に成る。図8-7参照。



以下にこれの概略を示す。加熱  $H$  や摩擦  $F$  が零なので流線関数  $\Psi$  の方程式 (8-1) は全領域で成立する。式 (8-7) より風上領域の温位  $\Theta_{in}(z)$  も流線関数  $\Psi_{in}(z)$  も鉛直座標  $z$  の一次関数に成る。

$$\Theta_{in}(z) = \Theta_{in}(0) + N^2 z, \quad \Psi_{in}(z) = Uz, \quad (8-8)$$

式(8-8)より温位  $\Theta[\Psi]$  と渦位  $Q[\Psi]$  の関数形が決まる。

$$\Theta = \Theta[\Psi] = \Theta_{in}(0) + (N^2/U)\Psi, \quad Q = Q[\Psi] = -(N/U)^2\Psi. \quad (8-9)$$

式(8-9)を代入して流線関数  $\Psi$  の方程式 (8-1) は次の形に簡単化される。

$$\partial^2 \Psi / \partial z^2 + (N/U)^2 \Psi = (N^2/U)z. \quad (8-10)$$

下端の境界条件は次の様である。

$$\Psi(x, h(x)) = \Psi_{in}(0) = 0. \quad (8-11)$$

ここで山  $h(x)$  に対して次の関数  $\xi(x)$  を導入する。

$$\Psi(x, 0) = -U\xi(x). \quad (8-12)$$

勿論  $\xi(x)$  は山  $h(x)$  と  $\Psi$  に依存する。式 (8-11) と式 (8-12) より  $\xi(x)$  は山  $h(x)$  と同じ局在性を持つ事が分かる。即ち

$\xi(x) > 0$ の範囲は  $h(x) > 0$ の範囲と同じである。上部の放射境界条件と下端境界条件(8-12)の下での方程式(8-10)の解は次式で与えられる。

$$\Psi(x, z) = Uz - U \cos(Nz/U) \cdot \xi(x) + U \sin(Nz/U) \cdot I \xi(x). \quad (8-13)$$

式(8-13)の演算子  $I$  は次式で定義される。

$$I \xi(x) = - \int dk \{ e^{ikx} / (2\pi)^{1/2} \} (ik / |k|) \xi(k). \quad (8-14)$$

但し  $\xi(k)$  は  $\xi(x)$  のフウリエ変換である。関数  $\xi(x)$  は山  $h(x)$  と同じ局在性を持つ。故に式(8-13)の右辺の第2項は山の無い所では零である。関数  $\xi(x)$  の局在性の為に、フウリエ変換  $\xi(k)$  の全ての特異点は虚部を伴う。故に  $\xi(k)$  の特異点からの式(8-14)の積分への寄与は、風下領域で指数関数的に減少する。即ち式(8-13)の右辺の第3項は山の近傍にしか値を持たない。

$$I \xi(x) \sim e^{-x} \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow +\infty. \quad (8-15)$$

結論として次の事が言える。安定度が或る高度以上で無限大の場合にも、安定度が一様の場合にも「静水圧波動は(水平方向には)山の近傍にしか存在しない」。

## 9 非静水圧の効果

非静水圧の効果を考える。この場合には静水圧方程式(5-1)は、移流項を無視しない鉛直方向の運動方程式に置き替わる。この鉛直速度  $w$  の移流項は、流線関数  $\Psi$  の式(2-3)を使って、 $\Psi$  と  $w$  のヤコビアンで表現される。

$$\frac{\partial(\Psi, w)}{\partial(z, x)} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Theta = 0, \quad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (9-1)$$

この場合にも温位保存式(6-1)は形を変えない。しかし鉛直方向の運動方程式(9-1)に付け加わった  $w$  の移流項の為に、エネルギー  $B$  と渦位  $Q$  には鉛直速度  $w$  に依る項が付け加わる。静水圧近似の運動エネルギー  $u^2/2 = (\partial \Psi / \partial z)^2/2$  に鉛直方向の運動エネルギー  $w^2/2 = (\partial \Psi / \partial x)^2/2$  が付け加わり、エネルギー保存式(6-2)は次の様に変更される。

$$B[\Psi, x] = B_{in}[\Psi] + \int_{-\infty}^x dx (F - zH/u),$$

$$B = (\partial \Psi / \partial z)^2/2 + (\partial \Psi / \partial x)^2/2 + \Phi - z\Theta. \quad (9-2)$$

同様に静水圧近似の渦度  $\partial^2 \Psi / \partial z^2$  に鉛直速度に依る渦度  $\partial^2 \Psi / \partial x^2$  が付け加わり、渦位保存式(6-3)は次の様に変更される。

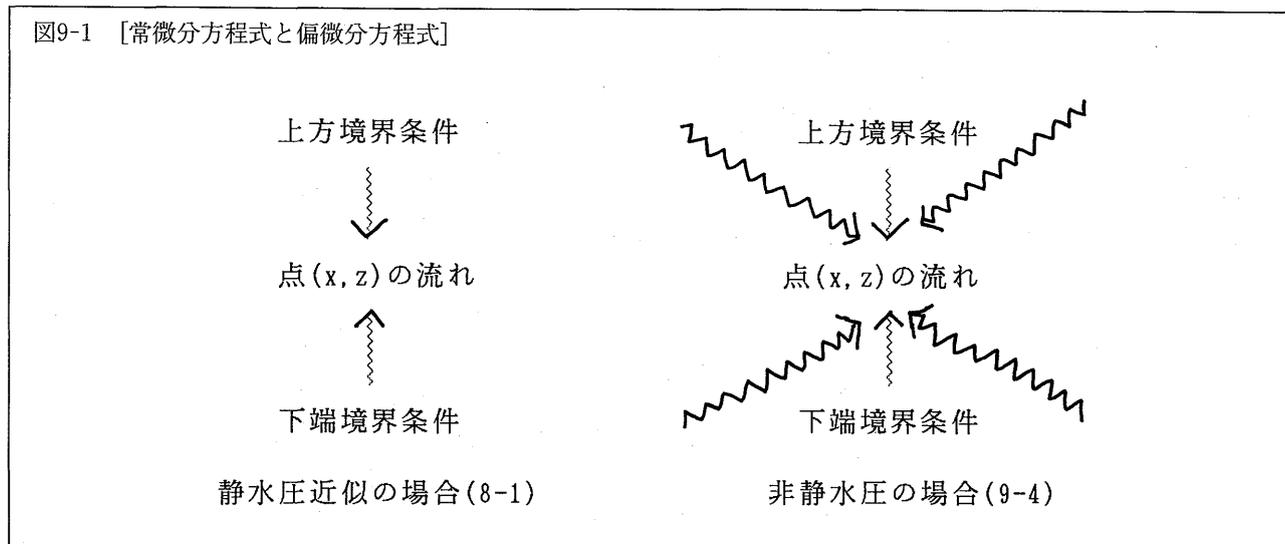
$$Q[\Psi, x] = Q_{in}[\Psi] + (\partial / \partial \Psi) \int_{-\infty}^x dx (F - zH/u).$$

$$Q = \partial^2 \Psi / \partial z^2 + \partial^2 \Psi / \partial x^2 - z \partial \Theta / \partial \Psi. \quad (9-3)$$

静水圧近似の場合と同様に、渦位  $Q$  はエネルギー  $B$  の  $\Psi$  導関数である。即ち渦位エネルギー関係式(7-1)は形を変えない。静水圧近似の場合と同様に、強制領域の外ではエネルギー  $B$  も渦位  $Q$  も流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って保存される。しかし式(9-3)に付け加わった  $\partial^2 \Psi / \partial x^2$  の為に、流線関数  $\Psi$  の支配方程式(8-1)は次の様に変更される。

$$\partial^2 \Psi / \partial z^2 + \partial^2 \Psi / \partial x^2 = Q[\Psi] + zd\Theta[\Psi]/d\Psi. \quad (9-4)$$

静水圧近似の場合(8-1)と異なり式(9-4)は水平座標  $x$  を陽に含んでいる。式(8-1)は水平座標  $x$  をパラメタとする、流線関数  $\Psi$  の鉛直座標  $z$  に関する「常微分方程式」であった。それ故に、或点  $x$  に於ける  $\Psi$  は、其点  $x$  での境界条件のみによって決まる。しかし式(9-4)は流線関数  $\Psi$  の、鉛直座標  $z$  と水平座標  $x$  に関する「楕円型の偏微分方程式」である。それ故に、或点  $x$  に於ける  $\Psi$  には、全ての点  $x$  の境界条件が関係する。図9-1参照。

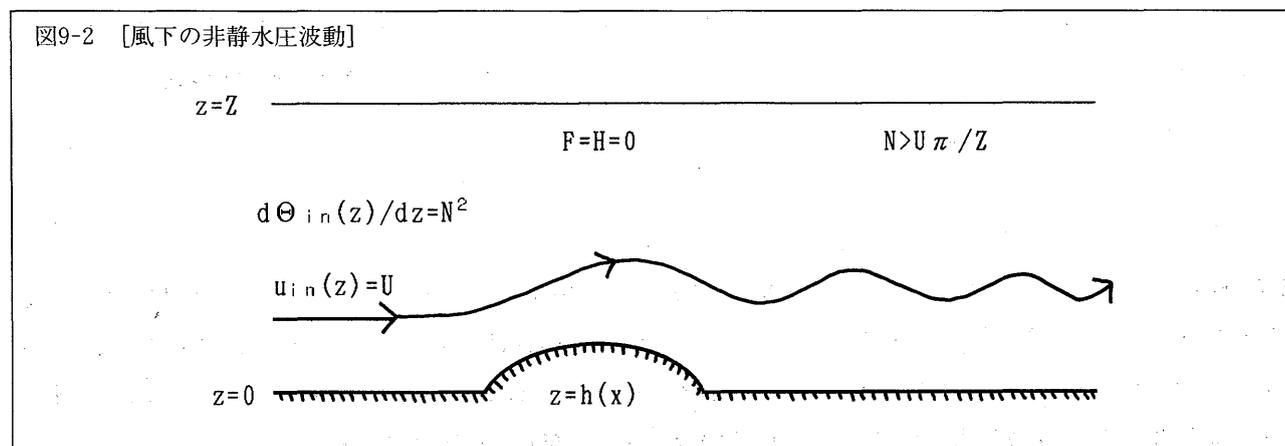


静水圧近似の場合の性質(8-4)と(8-5)と(8-6)は境界条件には関係がない。従ってこれらは非静水圧の場合にも成立する。但し静水圧近似の渦度  $\partial^2 \Psi / \partial z^2$  が真の渦度  $\partial^2 \Psi / \partial z^2 + \partial^2 \Psi / \partial x^2$  に置き替わる。

第8節「いくつかの一般的性質」の最後に述べた様に、加熱  $H$  も摩擦  $F$  も零の時には「静水圧波動は(水平方向には)山の近傍にしか存在しな」かった。非静水圧の場合でも「風上領域の安定度が鉛直方向に一定」の時には静水圧近似の場合と同様に「波は山の近傍にしか存在しない」事に成る。これは静水圧近似の場合(即ち第8節の終わりの方で述べた事)と同じ様にして示す事ができる。しかし「安定度が或る高度以上で無限大(即ち上空に硬い蓋が存在)」の時には、山から遠く離れた風下領域に風下波の存在する可能性が在る。詳しく言うと、風上領域の(蓋よりも低い高度の)安定度  $N$  が式(9-5)を満たす程に十分に大きければ風下波が存在する。

$$N > U \pi / Z \rightarrow \text{風下波.} \tag{9-5}$$

但し  $U$  は風上領域の風速である。  $Z$  は蓋の高度である。図9-2参照。



以下にこれの概略を述べる。第8節の静水圧近似の場合と同様に、風上領域の速度  $U$  と安定度  $N$  の一様性より、温位  $\Theta[\Psi]$  と渦位  $Q[\Psi]$  の関数形は次の様に決まる。

$$\Theta = \Theta[\Psi] = \Theta_{in}(0) + (N^2/U)\Psi, \quad Q = Q[\Psi] = -(N/U)^2\Psi. \quad (9-6)$$

式(9-6)を代入して、流線関数  $\Psi$  の方程式(9-4)は次の線形微分方程式に成る。

$$\partial^2\Psi/\partial z^2 + \partial^2\Psi/\partial x^2 + (N/U)^2\Psi = zN^2/U. \quad (9-7)$$

上空( $z=Z$ )に蓋が在る場合には境界条件は次の様に成る。

$$\Psi(x,Z) = \Psi_{in}(Z) = UZ, \quad \Psi(x,h(x)) = \Psi_{in}(0) = 0. \quad (9-8a,b)$$

ここで山の高さ  $h(x)$  の代わりに、次式を満たす関数  $\xi(x)$  を導入する。

$$\Psi(x,0) = -U\xi(x). \quad (9-9)$$

勿論  $\xi(x)$  は  $h(x)$  と  $\Psi$  に依存する。式(9-8b)と式(9-9)より  $h(x) > 0$  の領域と  $\xi(x) > 0$  の領域は一致する。即ち  $\xi(x)$  は  $h(x)$  と同じ局在性を持つ。境界条件(9-8a)と(9-9)の下での方程式(9-7)の解は次式で与えられる。

$$\Psi = Uz - U \int dk \{e^{ikx}/(2\pi)^{1/2}\} \xi(k) \{\cos \omega_k z - (\cot \omega_k Z) \sin \omega_k z\}. \quad (9-10)$$

但し  $\omega_k^2 = (N/U)^2 - k^2$  であり、 $\xi(k)$  は  $\xi(x)$  のフウリエ変換である。 $\xi(x)$  の局在性より  $\xi(k)$  の全ての特異点は虚部を伴う。従って  $\xi(k)$  の特異点の、式(9-10)の積分への寄与は、風下領域で指数関数的に減少してしまう。他の特異点は  $\sin \omega_k Z$  の零点である。この特異点を実数の  $k$  と成る為には

$$NZ/U > \pi. \quad (9-11)$$

でなければならない。実数の特異点からの、式(9-10)の積分への寄与は、風下領域で生き残る波を生み出す。

$$\text{風下波} \sim \exp[ik_n x], \quad k_n^2 = (N/U)^2 - (n\pi/Z)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9-12)$$

即ち風上領域の安定度が式(9-11)を満たす程に大きい時には風下波が存在する。

## 10 地球回転の効果 — 風上条件

地球回転の効果を考える。この場合には  $x$  方向の運動方程式(5-2)と  $y$  方向の運動方程式(5-15)に回転項(転向力)が付け加える。

$$\partial(\Psi, u)/\partial(z, x) + \partial\Phi/\partial x \underbrace{-fv}_{\text{転向力}} = F, \quad (10-1)$$

$$\partial(\Psi, v)/\partial(z, x) + \partial\Phi/\partial y \underbrace{+fu}_{\text{転向力}} = G. \quad (10-2)$$

左辺の最後の項が転向力(の負符号)である。 $x$  方向の運動方程式(10-1)を  $y$  で微分し、速度  $u$  や  $v$  や流線関数  $\Psi$  や摩擦  $F$  が  $y$  に依存しない事に注意して  $\partial^2\Phi/\partial x\partial y = 0$  と成る。これより非回転系の場合と同様に式(5-17)が成立する。即ち  $\partial\Phi/\partial y$  は風上領域の  $\partial\Phi_{in}/\partial y$  に等しい。静水圧方程式(5-1)より  $\partial\Theta/\partial y$  も風上領域の  $\partial\Theta_{in}/\partial y$  に等しい。風上条件式(2-5)と  $y$  方向の運動方程式(10-2)よりこれらは各々  $-fu_{in}$  と  $-fdu_{in}/dz$  に等しく成る。

$$\partial \Phi / \partial y = \partial \Phi_{in} / \partial y = -f u_{in}(z), \quad (10-3)$$

$$\partial \Phi / \partial y = \partial \Phi_{in} / \partial y = -f d u_{in}(z) / dz. \quad (10-4)$$

非回転系ではジオポテンシャル $\Phi$ と温位 $\Theta$ の $y$ 方向の勾配は零であった((5-18))。回転系では風上領域の $x$ 速度 $u_{in}(z)$ と地衡風平衡する為に、零ではなくて式(10-3)と式(10-4)と成る。風上領域での $x$ 方向の運動方程式(10-1)を鉛直座標 $z$ で微分し、更に静水圧方程式(5-1)を使い、 $\partial \Theta_{in} / \partial x = f d v_{in} / dz$ と成る。これと式(10-4)を風上領域での熱方程式(5-21)に代入して次式と成る。

$$u_{in} d v_{in} / dz - v_{in} d u_{in} / dz = 0. \quad (10-5)$$

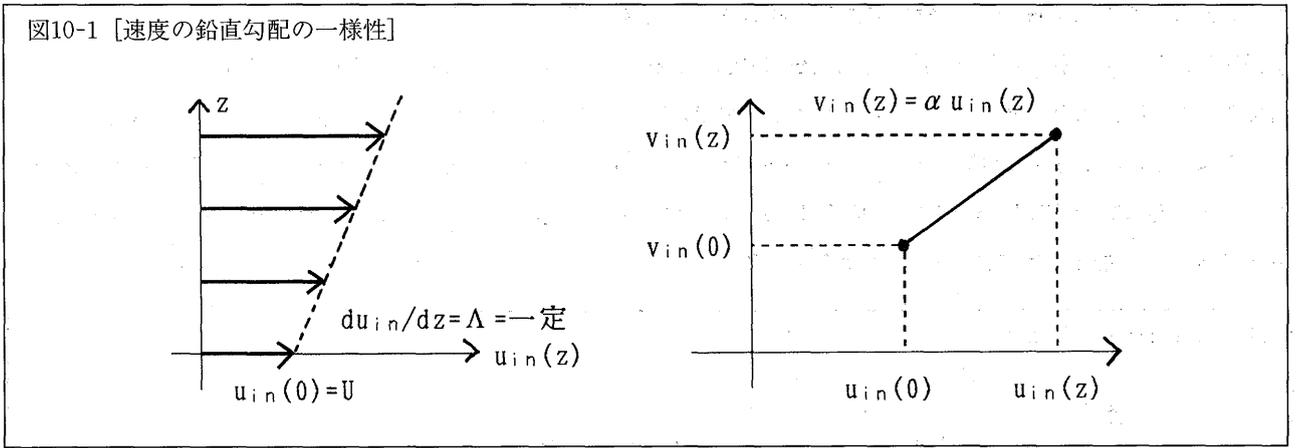
これを積分して、 $v_{in}$ は $u_{in}$ に比例する事が分かる。

$$v_{in}(z) = \alpha u_{in}(z), \quad \alpha = \text{const.} \quad (10-6)$$

熱方程式(5-21)を $y$ で微分して式(10-4)を代入すると $d^2 u_{in} / dz^2 = 0$ と成る。即ち

$$u_{in}(z) = U + \Lambda z, \quad U, \Lambda = \text{const.} \quad (10-7)$$

式(10-6)と式(10-7)は非定常系 and/or 非静水圧系でも成立する。即ち鉛直2次元の回転系では、風上領域での速度の鉛直勾配は一様でなければならない。一様でなければ2次元の仮定(2-1)が成り立たない。図10-1参照。



## 11 地球回転の効果 — 保存則

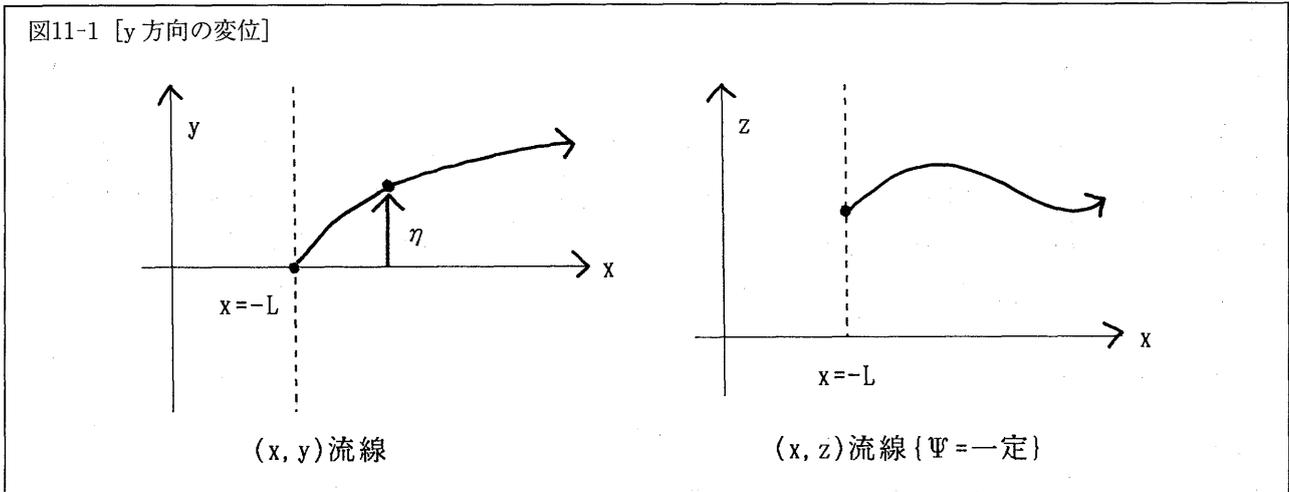
流線関数 $\Psi$ の式(2-3)を使い、式(10-4)と式(10-7)を代入して、熱方程式(5-21)は次の様に書ける。

$$\partial (\Psi, \Theta) / \partial (z, x) - f \Lambda v = H. \quad (11-1)$$

ここで3次元流線の $y$ 方向の変位 $\eta$ を導入する。

$$\partial (\Psi, \eta) / \partial (z, x) = v \quad \text{or} \quad \eta = \int_{-L}^x dx v / u. \quad (11-2)$$

但し積分は流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って行う。 $\eta_{in}(x = -L)$  を零とした。図11-1参照。



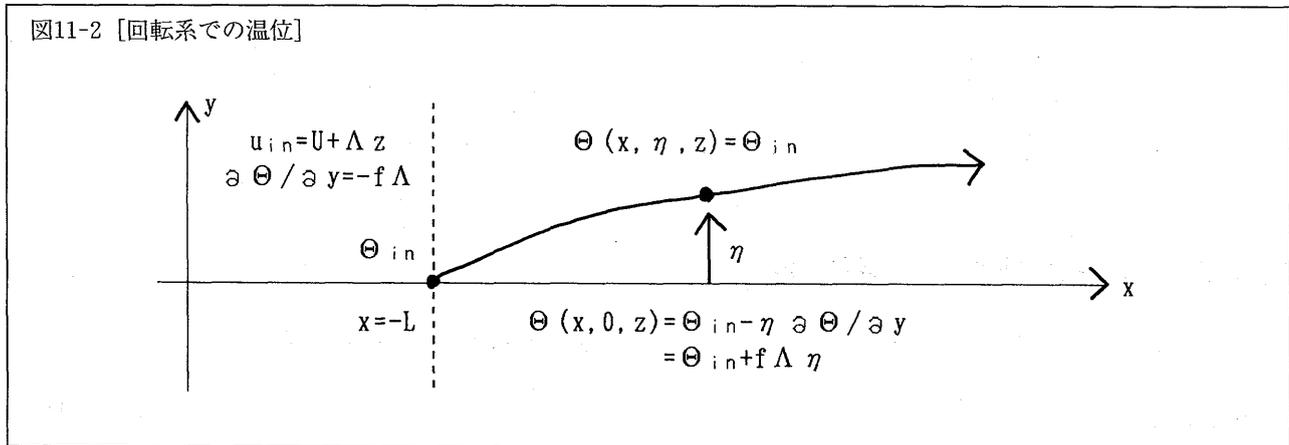
式(11-2)を代入すると熱方程式(11-1)は次の形に成る。

$$\partial(\Psi, \Theta^f) / \partial(z, x) = H, \quad \Theta^f = \Theta - f\Lambda\eta. \quad (11-3)$$

これを流線 {Ψ = 一定} に沿って -∞ から x 迄積分して次の温位保存式が得られる。

$$\Theta^f[\Psi, x] = \Theta_{in}^f[\Psi] + \int_{-\infty}^x dx H / u. \quad (11-4)$$

加熱 H が零の場合には  $\Theta^f = \Theta_{in}^f[\Psi]$  であり、 $\Theta^f$  は至る所で流線関数  $\Psi$  のみに依存する。即ち流線 {Ψ = 一定} に沿って保存される。回転系でも非回転系でも温位  $\Theta$  は3次元流線に沿って保存されている。非回転系では(鉛直2次元断面へと射影された)2次元流線 {Ψ = 一定} に沿っても温位  $\Theta$  は保存される。即ち非回転系での温位保存式(6-1)が成立する。回転系では温位  $\Theta$  は y 方向の勾配  $\partial\Theta / \partial y = -f\Lambda$  を持つ。これは風上領域での速度  $u_{in}(z) = U + \Lambda z$  と地衡風平衡する為である。この為に3次元流線の y 方向の変位  $\eta$  は、2次元流線 {Ψ = 一定} に沿って温位  $\Theta$  の増減を伴う。これを相殺する項  $-f\Lambda\eta$  を付け加える事によって、2次元流線 {Ψ = 一定} に沿っての保存量  $\Theta^f$  が得られる。図11-2参照。



次に運動方程式(10-1)と(10-2)に各々 u と v を掛けて和を取り、静水圧方程式(5-1)と熱方程式(11-1)を使うと次のエネルギーの式に成る。

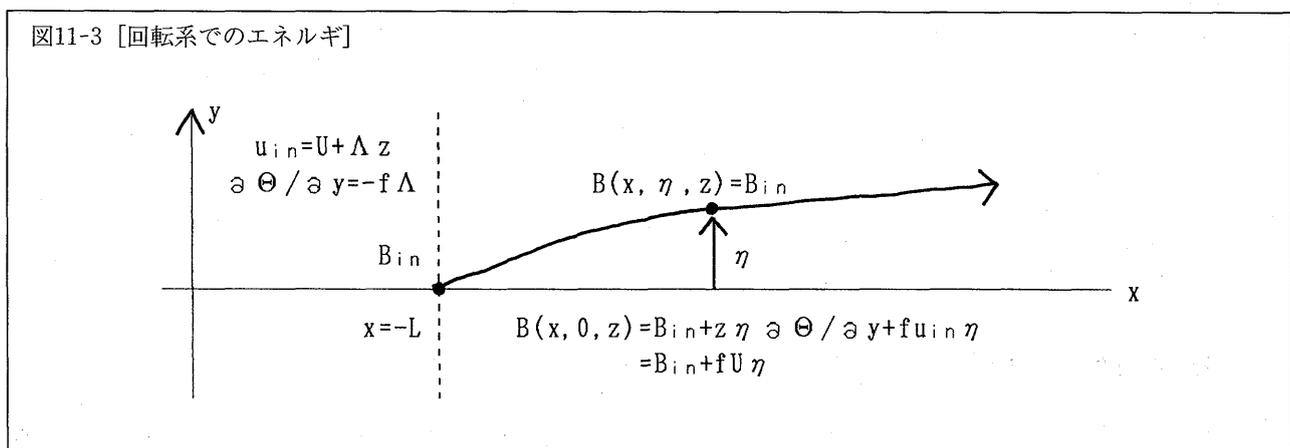
$$\partial(\Psi, B^f) / \partial(z, x) = uF + vG - zH,$$

$$B^f = B - fU\eta, \quad B = u^2/2 + v^2/2 + \Phi - z\Theta. \quad (11-5)$$

これを流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って  $-\infty$  から  $x$  迄積分して次のエネルギー保存式が得られる。

$$B^f[\Psi, x] = B_{in}^f[\Psi] + \int_{-\infty}^x dx (uF + vG - zH)/u. \quad (11-6)$$

摩擦  $F$  と  $G$  が零で且つ加熱  $H$  が零の場合には  $B^f = B_{in}^f[\Psi]$  であり、 $B^f$  は至る所で流線関数  $\Psi$  にのみ依存する。即ち流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って保存される。回転系でも非回転系でもエネルギー  $B$  は3次元流線に沿って保存されている。非回転系では(鉛直2次元断面へと射影された)鉛直2次元流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿ってもエネルギー  $B$  は保存される。即ち非回転系でのエネルギー保存式(6-2)が成立する。回転系では温位  $\Theta$  は  $y$  方向の勾配  $\partial \Theta / \partial y = -f \Lambda$  を持つ。これは風上領域での速度  $u_{in}(z) = U + \Lambda z$  と地衡風平衡する為である。この為に3次元流線の  $y$  方向の変位には、この温位勾配に基づくエネルギー増加分が伴う。これに加えて  $y$  方向の変位には気圧傾度力に基づく仕事も伴う。これらを相殺する項  $-fU\eta$  を付け加える事によって、2次元流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿っての保存量  $B^f$  が得られる。図11-3参照。



最後に、運動方程式(10-1)を鉛直座標  $z$  で微分し、更に少々複雑な計算の末に次の渦位の式が得られる。

$$\partial(\Psi, Q^f) / \partial(z, x) = u(\partial / \partial \Psi)(uF + vG - zH)/u,$$

$$Q^f = \partial^2 \Psi / \partial z^2 - z \partial \Theta^f / \partial \Psi - \partial(\eta, v + fx) / \partial(z, x). \quad (11-7)$$

これを流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って  $-\infty$  から  $x$  迄積分して次の渦位保存式が得られる。

$$Q^f[\Psi, x] = Q_{in}^f[\Psi] + (\partial / \partial \Psi) \int_{-\infty}^x dx (uF + vG - zH)/u. \quad (11-8)$$

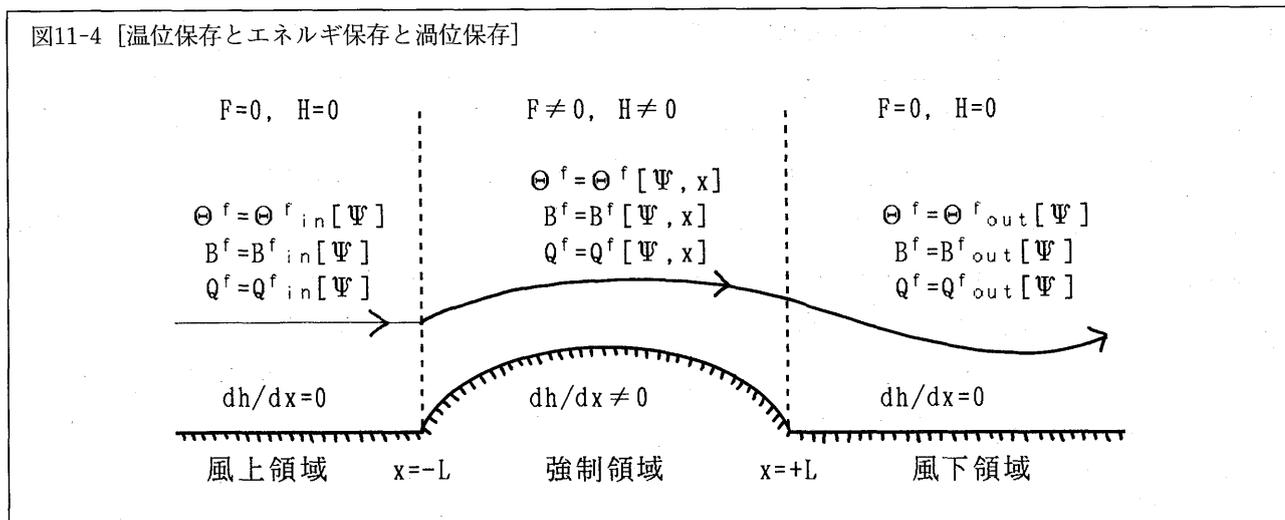
非回転系での場合(6-1)と(6-2)と(6-3)と同様に、 $\Theta^f$  と  $B^f$  と  $Q^f$  は風下領域では流線関数  $\Psi$  のみに依存する。即ちの流線  $\{\Psi = \text{一定}\}$  に沿って保存される。

$$\Theta_{out}^f[\Psi] = \Theta_{in}^f[\Psi] + \int_{-L}^{+L} dx H/u, \quad (11-9)$$

$$B_{out}^f[\Psi] = B_{in}^f[\Psi] + \int_{-L}^{+L} dx (uF + vG - zH)/u, \quad (11-10)$$

$$Q_{out}^f[\Psi] = Q_{in}^f[\Psi] + (d/d\Psi) \int_{-L}^{+L} dx (uF + vG - zH)/u. \quad (11-11)$$

式(11-9, 10, 11)の積分は勿論流線関数  $\Psi$  のみに依存する。図11-4参照。



非静水圧系の場合にはエネルギー $B^f$ の中の静水圧近似の運動エネルギー $u^2/2 + v^2/2$ が真の運動エネルギー $u^2/2 + v^2/2 + w^2/2$ に置き替わる。同様に渦位 $Q^f$ の中の静水圧近似の渦度 $\partial u/\partial z = \partial^2 \Psi/\partial z^2$ が真の渦度 $\partial u/\partial z - \partial w/\partial x = \partial^2 \Psi/\partial z^2 + \partial^2 \Psi/\partial x^2$ に置き替わる。非回転系の場合(7-1)と同様に渦位 $Q^f$ はエネルギー $B^f$ の $\Psi$ 導関数に一致する。

$$Q^f[\Psi, x] = \partial B^f[\Psi, x]/\partial \Psi. \tag{11-12}$$

## 12 地球回転の効果 — 近似系

第11節で導いた保存則を手がかりに問題を解析してもよいが、第4節で述べた様に地球回転の効果は小さい。そこで地球回転の第1次の効果だけを考慮した近似系を考える事もできる。式(10-3)を代入してy方向の運動方程式(10-2)は次の様に成る。

$$\partial(\Psi, v)/\partial(z, x) = f(u_{in} - u) + G. \tag{12-1}$$

いまy方向の強制力Gが零で、風上領域のy速度 $v_{in}$ が零の場合を考える(即ち式(10-6)で $\alpha$ が零の場合を考える)。この場合には式(12-1)よりvはfに比例する。

$$v = f \int_{-L}^x dx (u_{in} - u)/u. \tag{12-2}$$

但し積分は流線 $[\Psi = \text{一定}]$ に沿って行う。式(12-2)を代入して、x方向の運動方程式(10-1)と熱方程式(11-1)は、コリオリ因子fの1次迄の近似( $f^2$ を無視する近似)で次の様に成る。

$$\partial(\Psi, u)/\partial(z, x) + \partial \Phi/\partial x = F \quad \text{to } 0(f). \tag{12-3}$$

$$\partial(\Psi, \Theta)/\partial(z, x) = H \quad \text{to } 0(f). \tag{12-4}$$

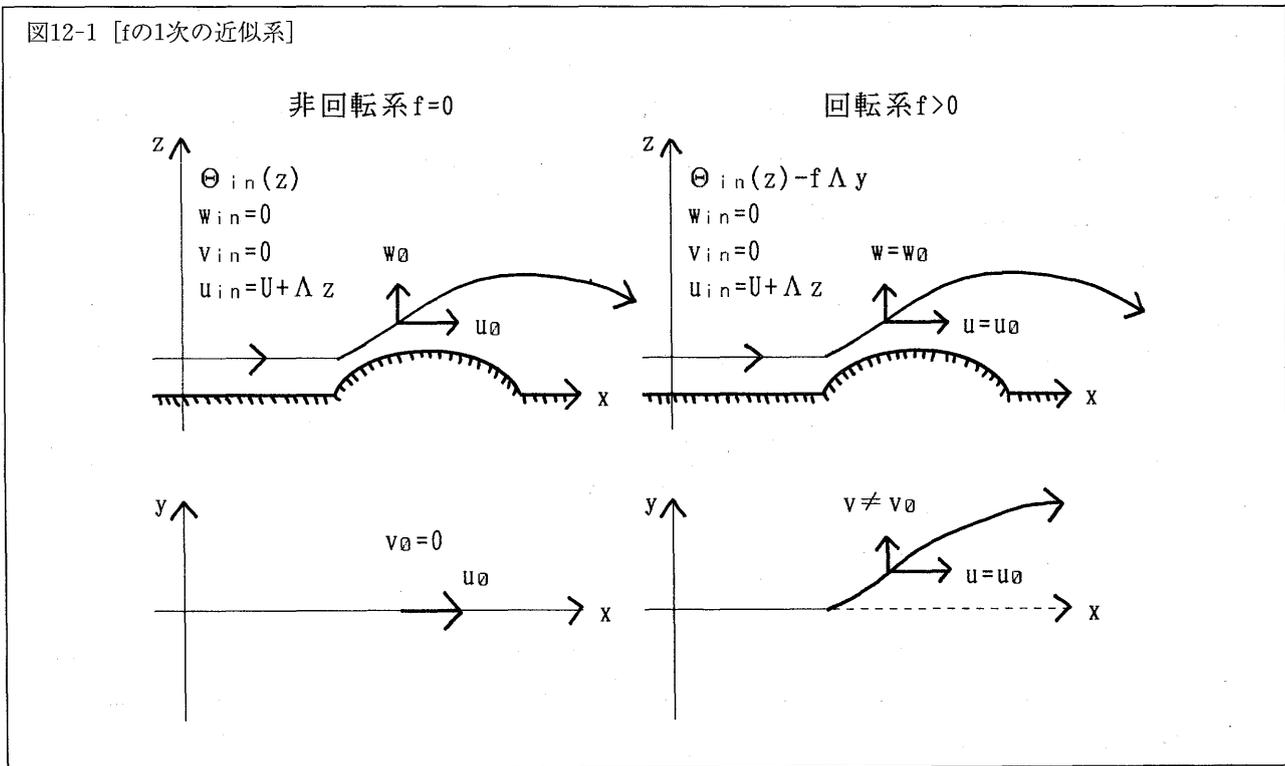
これらは非回転系の式(5-2)及び式(5-3)と全く同じ形をしている。静水圧方程式(5-1)は回転系でも同じである。故にfの1次迄の近似では(x, z)鉛直断面内での速度(u, w)は地球回転の影響を受けない。即ち非回転系での速度 $(u_0, w_0)$ に等しい。今の場合には風上領域のy方向の速度 $v_{in}$ が零なので、非回転系ではy方向の速度 $v_0$ は至る所で零である。しかし地球回転の効果でfに比例するvが惹起される。

$$u = u_0, \quad w = w_0, \quad v = f \int_0^1 dt (u_{in} - u_0) \neq v_0 = 0 \quad \text{to } 0(f). \quad (12-5)$$

非回転系での温位 $\Theta_0$ は $y$ に依存せず $\Theta_0 = \Theta_0(x, z)$ である。回転系での温位 $\Theta$ には、 $u_{in}(z) = U + \Lambda z$ と地衡風平衡する回転項 $-f\Lambda y$ が付け加わるだけである。即ち $(x, z)$ 鉛直断面内での温位 $\Theta$ の分布は地球回転の影響を受けない。

$$\Theta(x, y, z) = \Theta_0(x, z) - f\Lambda y \quad \text{to } 0(f). \quad (12-6)$$

式(12-5)及び式(12-6)より次の事が分かる。即ち $f$ の1次迄の近似で、 $y$ 方向の速度成分 $v$ を別にして、流れの様子は地球回転の影響を受けず非回転系と同じになる。式(12-5)及び(12-6)は非定常系 and/or 非静水圧系の場合にも成立する。但し非定常系の場合には式(12-5)の積分は流体粒子の軌跡に沿って行う。図12-1参照。



### 13 非定常の効果 — 渦位エネルギー関係式

定常で非回転の場合には式(7-1)で表される様に、渦位 $Q$ はエネルギー $B$ を流線関数 $\Psi$ で微分したものに等しかった。摩擦 $F$ や加熱 $H$ の強制が零で、強制領域には地面の起伏 $h$ だけが在る場合を考える。この場合には温位 $\Theta$ も渦位 $Q$ もエネルギー $B$ も流線関数 $\Psi$ のみの関数であり、渦位エネルギー関係式は次の様に成る。

$$dB/d\Psi = Q, \quad B = K + \Phi - z\Theta, \quad Q = \zeta - z d\Theta/d\Psi. \quad (13-1)$$

但し $K = u^2/2 + w^2/2$ は運動エネルギーで $\zeta = \partial u/\partial z - \partial w/\partial x$ は渦度である。非定常の場合の運動方程式は、定常の水平運動方程式(5-2)と鉛直運動方程式(9-1)に速度 $(u, w)$ の時間変化項が付け加わって次の様に成る。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\Psi, u)}{\partial(z, x)} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0. \quad (13-2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(\Psi, w)}{\partial(z, x)} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \Theta = 0. \quad (13-3)$$

定常の熱方程式(5-3)にも、非定常の場合には温位 $\Theta$ の時間変化項がつけ加わる。

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial (\Psi, \Theta)}{\partial (z, x)} = 0. \tag{13-4}$$

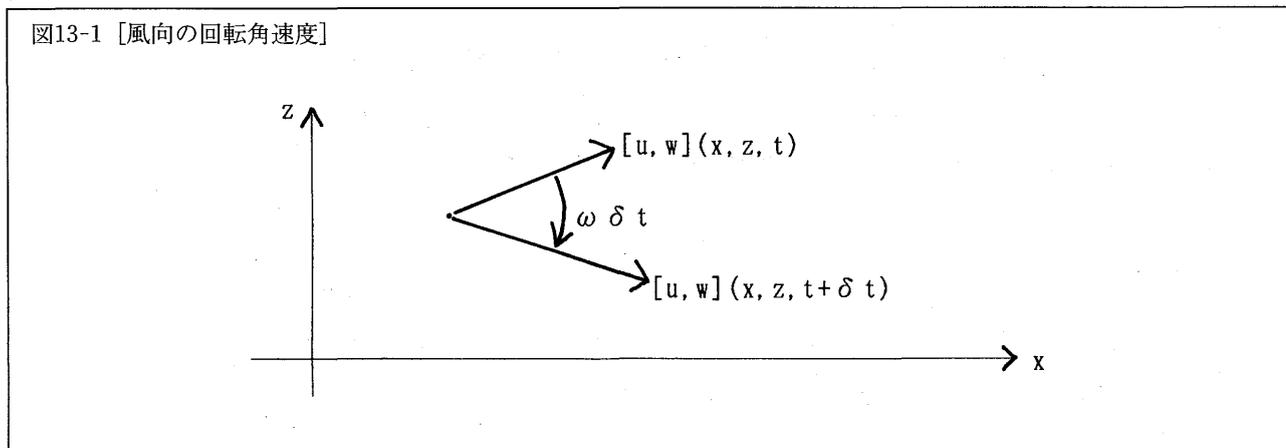
定常の場合と同様に式(13-2)にuを掛け式(13-3)にwを掛けて足し合わせ、式(13-4)を使って次のエネルギーの式が得られる。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (\Psi, B)}{\partial (z, x)} = 0, \quad E = B - \Phi, \quad B = K + \Phi - z\Theta. \tag{13-5}$$

即ち非定常の場合にもエネルギー(正確にはエネルギー流束密度)は $B=K+\Phi-z\Theta$ で与えられる。少々複雑な計算の結果、式(13-2)と式(13-3)は次の形に変形される。

$$\left(\frac{1}{2K}\right) \left(\frac{\partial K}{\partial t}\right) [u, w] + (\zeta + \omega) [w, -u] + *B + z * \Theta = 0. \tag{13-6}$$

但し $\omega$ は点(x,z)での速度ベクトル[u,w]の回転角速度である。即ち点(x,z)での風向の回転角速度である。\*は勾配ベクトルである。即ち $*B = [\partial B / \partial x, \partial B / \partial z]$ 及び $*\Theta = [\partial \Theta / \partial x, \partial \Theta / \partial z]$ である。図13-1参照。



式(13-6)と $*\Psi = [\partial \Psi / \partial x, \partial \Psi / \partial z]$ との内積と取り、流線関数の式(2-3)より $*\Psi = [-w, u]$ である事に注意して次式が得られる。

$$*\Psi \cdot *B = (\zeta + \omega) *\Psi \cdot *\Psi - z *\Psi \cdot *\Theta. \tag{13-7}$$

式(13-7)の右辺第2項の $*\Psi \cdot *\Psi$ は

$$*\Psi \cdot *\Psi = u^2 + w^2 \tag{13-8}$$

即ち速度の大きさの2乗である。式(13-8)を使い、更に $*\Psi \cdot *B$ および $*\Psi \cdot *\Theta$ が、Bおよび $\Theta$ の、 $\Psi$ の勾配方向の微分に比例する事に注意して、式(13-7)より次の渦位エネルギー関係式が得られる。

$$\frac{\partial B}{\partial \Psi} = \zeta + \omega - z \frac{\partial \Theta}{\partial \Psi}. \tag{13-9}$$

但し $\Psi$ での微分は $*\Psi$ の方向(即ち流線に直交する方向)に行く。定常系での渦位エネルギー関係式(13-1)の渦度 $\zeta$ は、非定常系(13-9)では渦度と速度の回転角速度の和 $\zeta + \omega$ に置き替わる。