

第2章 原理

ウィンドプロファイラーは、電波を発射して大気からの散乱波を受信して風向、風速の鉛直プロファイル測定する。電波の送信、受信は5 cm程度の波長を用いる通常の気象レーダーと同様なためレーダー方程式が適用できる(吉田, 1983)。ただ、通常のレーダーは主として雨滴による散乱波を受信するのに対し、ウィンドプロファイラーは大気中の乱れなどによる大気屈折率の変動により散乱又は反射されてきた信号を受信する。ここでは、レーダー方程式については簡単に述べ、大気による散乱をやや詳しく述べる。

2.1 レーダー方程式

大気中に発射された電波は様々な散乱体により散乱されその一部が戻ってくる。散乱体が移動していると散乱された電波の周波数はドップラー効果により送信周波数からずれてくる。散乱体が速度 v でウィンドプロファイラーに近づいてくる場合、散乱波の周波数は送信周波数(波長: λ)から $+2v/\lambda$ 偏移する。ウィンドプロファイラーは、この周波数の偏移量を観測して風速を求めるものである。この偏移量の観測精度は受信エコーの信号対雑音比に大きく依存している。すなわち散乱体により散乱される電波強度に密接に関係している。大気中の散乱過程には晴天大気時の乱流散乱、分反射そして雲や降水等の粒子による散乱、また熱的散乱がある。最後の熱的散乱は自由電子によるもので中間圏を対象とする。

大気中に送信された電波は、上に述べた様な過程により散乱され1部がアンテナに戻ってくる。散乱により戻ってきた電波のエネルギーすなわち受信電力(P_r)と送信出力(P_t)との関係を記述するのがレーダー方程式である(例えば小平, 1980, Probert-Jones, 1962)。

$$P_r = \frac{P_t G^2 f^4(\theta, \phi) \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 r^4 l^2}, \quad (2-1)$$

ここで、 G はアンテナゲイン、 $f(\theta, \phi)$ はアンテナからの出力の天頂角 θ 、方位角 ϕ 依存を表すアンテナパターン、 λ は送信電波の波長、 r はアンテナから散乱体までの距離である。 l はアンテナと散乱体間での電波減衰量である。 σ は後方散乱断面積と呼ばれる量で、1回の散乱により電波が散乱される量を表し、面積の次元を持つ。大気中の雨滴等の散乱体による散乱波電力(P_{r0})は、散乱断面積と入射する電力密度の積になる。散乱体への入射波電力密度を S_i とすると

$$P_{r0} = \sigma S_i, \quad (2-2)$$

となる。電力密度は単位面積当たりの電力を表す。レーダーから距離 r 離れた散乱体からの散乱波の、有効面積 $A = G\lambda^2/4\pi$ のアンテナにおける散乱波電力密度は

$$S_r = \text{アンテナでの電力} / A,$$

となる。散乱が等方に起こるとすると σ は

$$\sigma = 4\pi r^2 \frac{S_r}{S_i}, \quad (2-3a)$$

と表される。目標物とアンテナの距離が十分大きいとして、電界強度を用いると

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \left| \frac{E_r}{E_i} \right|^2, \quad (2-3b)$$

で定義される。ここに、 E_i は目標物に入射する電界強度、 E_r は、目標物により反射される電界強度である。さらにレーダー方程式を用いると

$$\sigma = \frac{(4\pi)^2 r^4 S_r}{P_t f^2(\theta, \phi) G}, \quad (2-4)$$

となる。

目標物が体積 dV を持っている場合、単位体積当たりに換算した後方散乱断面積 (η) を reflectivity と呼び

$$\eta \equiv \frac{d\sigma}{dV}, \quad (2-5)$$

で定義される。 η を用いると $dV = r^2 dr d\Omega$ からレーダー方程式は

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \eta}{(4\pi)^3 r^2 l^2} \frac{c \tau_w}{2} \int f^4(\theta, \phi) d\Omega, \quad (2-6)$$

となる。 Ω は立体角、 c は光速、 τ_w はパルス幅を示す。reflectivity の簡単な例として雨滴によるものを考える。雨滴の大きさが電波の波長に比べて十分小さいとするとレーリー理論が適用できる。この場合、直径 D の雨滴の後方散乱断面積を $\sigma(D)$ は D^6/λ^4 に比例する。 $N(D)$ の粒径分布を持つ雨の reflectivity は

$$\eta = \int_0^{\infty} \sigma(D)N(D)dD = 284.6 Z_r \lambda^{-4}, \quad (2-7a)$$

となる。ここで

$$Z_r = \int_0^{\infty} D^6 N(D) dD$$

は reflectivity factor と呼ばれる量である。また、屈折率の乱れによる reflectivity は後で詳しく述べるが

$$\eta = 0.38 C_r^2 \lambda^{-4}, \quad (2-7b)$$

となる。ここで C_r^2 は構造パラメータと呼ばれる乱流場を表す量である。

2.2 大気の流れとブラッグ散乱

電波は雨滴のみならず晴天大気によっても散乱され一部がウィンドプロファイラーに戻ってくる。これは、風のシアや乱流により大気中の屈折率が空間的に変動するためである。この大気による電波の散乱特性、すなわち reflectivity はマックスウェルの方程式から得られる (Doviak and Zrnicek, 1992, 11章)。マックスウェルの方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2-8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2-9)$$

と記述される。ここで \mathbf{E} は電界、 \mathbf{H} は磁界、 μ は透磁率で大気の場合ほぼ 1 になる。 t は時間を表す。 ϵ は誘電率で屈折率 n とは

$$n^2 = \mu \epsilon \approx \epsilon, \quad (2-10)$$

の関係にある。このため大気中の屈折率の変化により電場が変化し、反射されることになる。マックスウェルの方程式から \mathbf{E} についての方程式を導くために、良く知られているように (2-8) 式のローテーションをとる。さらに、(2-9) 式に $\nabla \cdot$ を作用するとマックスウェルの方程式は

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\nabla \left[\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right], \quad (2-11)$$

と表される (Doviak and Zrnice, 1992)。ここで ϵ_0 は真空の誘電率を示す。

大気のある場所の誘電率が空間的に平均した値 $\bar{\epsilon}$ から次式のように変動している場合を考える。

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} + \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon_0} = \bar{n}^2 + 2\bar{n}\Delta n. \quad (2-12)$$

ここで

$$\bar{n} \equiv \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} \right)^{1/2}, \quad (2-13)$$

$$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon_0} = 2\bar{n}\Delta n, \quad (2-14)$$

ここで \bar{n} は大気中の平均の屈折率を表す。また、 $\Delta \epsilon$ および Δn は大気の乱れによる ϵ および n の変動成分で、平均値に比べて十分小さいと仮定している。この場合のマックスウェルの式は

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\bar{n}^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{2\bar{n}\Delta n}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - 2\nabla \left[\mathbf{E} \cdot \nabla \ln(\bar{n}) \right] - \nabla \left[\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \left(1 + \frac{2\Delta n}{\bar{n}} \right) \right], \quad (2-15)$$

となる (Doviak and Zrnice, 1992)。屈折率の変動の無い場合のマックスウェルの式の解を \mathbf{E}_0 とし、屈折率の変動により変化する電場を \mathbf{E}_1 とし、(2-15) の解を $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$ とする。(2-15) 式の \ln の項を展開すると

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_0 + \nabla^2 \mathbf{E}_1 - \frac{\bar{n}^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) &= \frac{2\bar{n}\Delta n}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) - 2\nabla \left[(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) \cdot \nabla \ln(\bar{n}) \right] \\ &\quad - \nabla \left\{ (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) \cdot \nabla \left[\frac{2\Delta n}{\bar{n}} - \frac{1}{2} \left(\frac{2\Delta n}{\bar{n}} \right)^2 + \dots \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2-16)$$

が得られる。 $\Delta n \rightarrow 0$ では

$$\nabla^2 \mathbf{E}_0 - \frac{\bar{n}^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{E}_0) = -2\nabla \left[\mathbf{E}_0 \cdot \nabla \ln(\bar{n}) \right], \quad (2-17)$$

と E_0 についての式が得られる。送信波を振動数 ω_0 の調和波とすると屈折後の波も調和振動となり $E_0 = E_0(r)e^{j\omega_0 t}$ の形となるため

$$\nabla^2 E_0(r) + k_0^2 \bar{n}^2 E_0(r) = -2\nabla[E_0(r) \cdot \nabla \ln(\bar{n})], \quad (2-18)$$

となる。ここで $k_0 = \omega_0/c = 2\pi/\lambda$ である。 r は、反射に強く寄与するサンプリング体積内の任意の場所を原点とした距離ベクトルを示す(図2.1)。 $\Delta n \ll \bar{n}$ と仮定し(2-16)式の Δn の高次項および E_1 との積の項を無視して(2-17)を差し引くと

$$\nabla^2 E_1 - \frac{\bar{n}^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = -2k_0^2 \bar{n} \Delta n E_0(r) - 2\nabla \left[E_1 \cdot \nabla \ln(\bar{n}) + E_0(r) \cdot \nabla \left(\frac{\Delta n}{\bar{n}} \right) \right], \quad (2-19)$$

と E_1 についての式が得られる。

乱流等による屈折率の変動 (Δn) により散乱される電場 E_1 を求める。(2-19) 式の解を求める上で次の事を仮定する。

- (a) 平均屈折率の変化は大きくなく送信電波の波長程度は無視できる ($|\Delta \bar{n}|/2\pi \ll 1/\lambda$)。
- (b) $\bar{n} \approx 1$ 。
- (c) 送信電波時間変化(周波数)が Δn の変化に比べ早い。
- (d) 送信電波のパルス幅およびビーム幅で決まる散乱領域は散乱体とアンテナの間の距離に比べ小さい。

(a)の仮定から(2-19)式の右辺第2項、 $-2\nabla E_1 \cdot \nabla \ln(\bar{n})$ 、が無視できる。また、(c)の仮定により送信波は調和波ならば E_1 もまたほぼ調和波と見なせ時間微分が簡単になる。 E_1 の強度を E_1

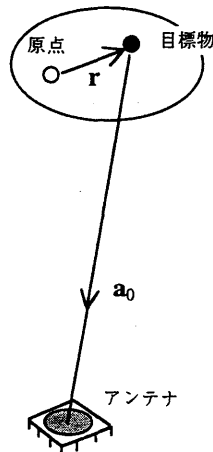


図2.1 電波の散乱の模式図。

(r, t) と書き, 上の仮定を用いると, (2-19) 式は

$$\nabla^2 E_1(r, t) + k_0^2 E_1(r, t) = -2k_0^2 \Delta n E_0(r) - 2\nabla \cdot [E_0(r) \cdot \nabla(\Delta n)], \quad (2-20)$$

と良く知られる形になる。

(2-20) の解として, 位置 r_0 にあるアンテナの電場は,

$$E_1(r_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V [2k_0^2 \Delta n E_0(r) + 2\nabla \cdot \{E_0(r) \cdot \nabla(\Delta n)\}] e^{j(\omega_0 r - k_0 r_0)} / r_0 dV, \quad (2-21)$$

が得られる。ここで V は散乱領域を示す。なお, ここでアンテナと散乱体の距離はサンプリング体積内ではほぼ等しいと仮定している。 $E_0(r)$ を

$$E_0(r) = A_0(r) \frac{e^{-jk_0 r_0}}{r_0}, \quad (2-22)$$

とする。 $A_0(r)$ は送信波の角度特性 (アンテナパターン) および振幅で r による変化は大きくない (Tatarskii, 1971)。 A_0 を用いると, 散乱波電界は (2-21) から

$$E_1(r_0, t) = \frac{1}{2\pi} [k_0^2 \int_V \Delta n A_0(r) e^{-2jk_0 r_0} / r_0^2 dV + \int_V \nabla \cdot (e^{-jk_0 r_0} A_0(r) \cdot \nabla(\Delta n)) e^{-jk_0 r_0} / r_0^2 dV], \quad (2-23)$$

となる。 E_1 の時間依存は Δn の変動によるものである。(2-23) 式は, 次の

- (e) (d) の仮定から $\nabla e^{-jk_0 r_0} \approx a_0 j k_0 e^{-jk_0 r_0}$ となること (a_0 は散乱波の進行方向の単位ベクトル),
 - (f) Δn および $A_0(r)$ の r による変化が無視できること,
 - (g) 送信波のビーム幅が狭いと仮定すると $A_0(r)$ と送信電波の進行方向はほぼ直交すること,
- ことを用いると

$$E_1(r_0, t) = \frac{k_0^2}{2\pi r_0^2} \int \Delta n A_0(r) e^{-2jk_0 r} dV. \quad (2-24)$$

となる。ここで r_r は散乱領域内の散乱体とアンテナまでの距離を示す。さらに散乱領域が十分小さいので入射電界を平面波と見なし,

$$e^{-jk_0 r_r} \approx e^{-jk_0(r_0 + a_0 \cdot r)}, \quad (2-25)$$

また, $A_0(r)$ を定数とすると,

$$E_1(r_0, t) = \frac{k_0^3 A_0}{2\pi r_0^2} e^{-2jk_0 r_0} C_1, \quad (2-26)$$

となる。ここで、

$$C_1 = \int_V \Delta n(r, t) e^{-j2k_0 \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}} dV, \quad (2-27)$$

である。

散乱電界 E_1 が大きくなるためには C_1 が大きくなる必要がある。(2-27) 式は \mathbf{a}_0 の方向の Δn のフーリエ成分を表している。このため散乱電界は \mathbf{a}_0 方向の Δn が大きい程大きくなる。 Δn の $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}$ に沿った乱れの波数を K とすると C_1 が干渉により大きくなる条件は

$$K = 2k_0, \quad (2-28)$$

である。すなわち、乱れの波長 λ (乱流) と電波の波長 (λ (電波)) とは

$$\frac{1}{\lambda(\text{乱流})} = 2 \frac{1}{\lambda(\text{電波})}, \quad (2-29)$$

となる。散乱波が同相で重なるためには、大気の変動の波長が電波の波長の $1/2$ となることが条件となる。これがブラッグ散乱である。屈折率の変動の波長がこの条件からずれると反射強度は急減する。図 2.2 は屈折率の変動として音波を発射してその波面から反射される電力と電波波長/音波波長の比の関係をプロットしたもの (Marshall, 1972) で、比が 2 からずれる

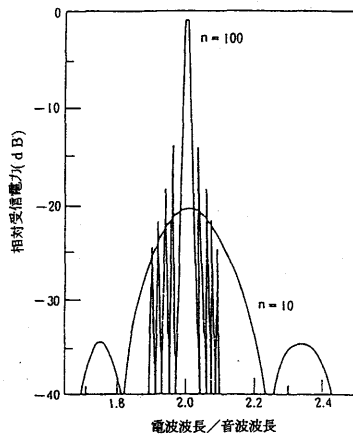


図 2.2 音波面から反射される反射電力と、(電波の波長) / (音波の波長) の関係 (Marshall et al., 1972)。比が 2 からずれると受信電力は急減する。なお、 n は音波の波面の数を表している。

と反射電力が急激に減衰することが分かる。

散乱波の電力密度 S は、屈折率の変動による散乱波の無い場合の電場 E_1 と磁界 H を用いて、

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_1 \times H_1^*), \quad (2-30)$$

と表される。Re は実数成分を表す。

$$|H_1| \approx |E_1| \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}. \quad (2-31)$$

これらの関係および (2-26) と C_1 の式から

$$S = \frac{A_0^2 k_0^4 \sin^2 \chi}{8 \eta_0 \pi^2 r^4} C_1 C_1^*, \quad (2-32)$$

ここで

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad (2-33)$$

である。 C_1^* は C_1 の共役複素数でアンサンブル平均を取ったものは

$$C_1 C_1^* = \iint_V \langle \Delta n(r, t) \Delta n(r', t') \rangle e^{-jk_0 a_0 \cdot (r-r')} dV dV', \quad (2-34)$$

となる。ここで $\langle \Delta n(r, t) \Delta n(r', t') \rangle$ は Δn の自己相関で次節で述べる。

なお、 A_0 は、

$$S = |E_0|^2 / 2 \eta_0, \quad (2-35)$$

およびレーダー方程式から

$$A_0 = P_t G f^2 \eta_0 / 2 \pi, \quad (2-36)$$

と表される。この A_0 を用いると後方散乱強度は、(2-26) から

$$E_1(r_0, t) = \frac{k_0^2}{r_0^2} \sqrt{\frac{P_t \eta_0 G}{8 \pi^3}} \int f \Delta n e^{-2jk_0 r_0} dV, \quad (2-37)$$

となる。

2.3 大気の乱れと屈折率の変化

大気中の屈折率の変動 (Δn) により電波は屈折, 散乱されることが (2-32) で示された。大気の屈折率は温度 (T :K), 気圧 (hPa) および水蒸気圧 (e :hPa) により

$$n - 1 = 10^{-6} \frac{77.6}{T} \left(P + \frac{4810e}{T} \right), \quad (2-38)$$

のように近似的に表される。このため, 大気の乱れにより温度や湿度が変動し, その結果屈折率も場所により変動することになる。この様な変動は図 2.3 に示すようにランダム状に複雑に変化しているため, (2-34) のように相関関数を用いて統計的に表される。 γ をラグとすると Δn の相関関数は

$$\langle \Delta n(t) \Delta n(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Delta n(t) \Delta n(t + \tau) dt. \quad (2-39)$$

この相関関数をフーリエ変換すると Wiener-Khintchine の公式によりパワースペクトル密度が得られる。時間的, 空間的に均質な乱れでは, (2-34) 式の屈折率変動量の自己相関 $\langle \Delta n(r, t) \Delta n(r', t') \rangle \equiv R(r, r', t, t')$ は

$$R(r, r', t, t') = R(r - r', t - t') = R(\Delta r, \Delta t), \quad (2-40)$$

となる。ここで

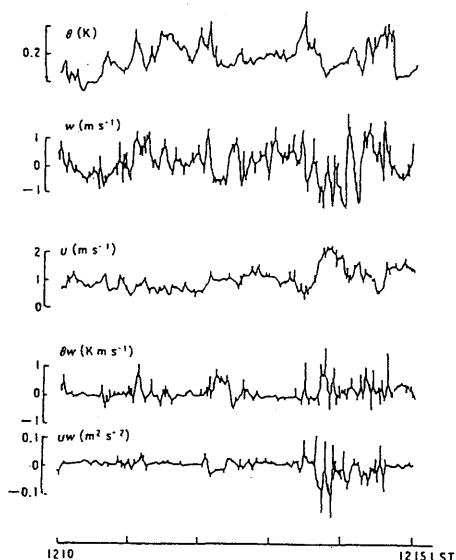


図 2.3 水平および鉛直方向の風速および気温の時間変動の観測例 (気象研究所花房龍男氏提供)。

$$\begin{aligned}\Delta r &= r - r', \\ \Delta t &= t - t'\end{aligned}$$

である。また、電波の散乱に寄与する電波の波長の半分の波数の乱れの寿命が十分長い（ある乱流の場が壊れる時間より）と仮定し、時間の項を無視して $R(\Delta r, \Delta t=0)$ を $R(\Delta r)$ として、相関関数 $R(\Delta r)$ をフーリエ変換すると乱流のスペクトル密度 Φ が求まる。

$$\Phi(K) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint R(\Delta r) \exp(-jK \cdot \Delta r) dV_{\Delta r}, \quad (2-41)$$

ここで K は乱流の波数ベクトルを、 $V_{\Delta r}$ は Δr での体積を示す。 K の方向性を考えずに大きさのみを考慮した1次元のスペクトル密度 F と

$$F(K) = 4\pi K^2 \Phi(K), \quad (2-42)$$

の関係にあるとすると、 Φ は規格化されて

$$\iiint \Phi(K) dK = \overline{(\Delta n)^2}, \quad (2-43)$$

となる。

R は Φ の逆フーリエ変換で表されるので、(2-32) 式の電力密度 S は、 Φ を用いて表すと

$$S = \frac{A_0^2 k_0^4}{8\eta_0 \pi^2 r^4} \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \Phi(K) \int \exp(jK \cdot \Delta r) dV_{\Delta r} dV_K, \quad (2-44)$$

となる。 V_K は波数空間での体積を示す。内側の積分は、大きな $V_{\Delta r}$ を取ると $K=2k_0$ で実際の体積 V の値を持つ鋭いピークとなる。積分値をこのピークの値で近似すると

$$S(K) = \frac{A_0^2 k_0^4}{8\eta_0 \pi^2 r^4} \int \frac{V}{8\pi^3} \Phi(K) dV_K. \quad (2-45)$$

あるいは Φ の平均値を

$$\overline{\Phi} \equiv \int \frac{V}{8\pi^3} \Phi(K) dV_K, \quad (2-46)$$

で定義すると

$$S(K) = \frac{\pi A_0^2 k_0^4}{\eta \sigma_0^4} \overline{\Phi}(K). \quad (2-47)$$

となる。レーダー方程式から reflectivity η は $\overline{\Phi}$ により

$$\eta = 8\pi^2 k_0^4 \overline{\Phi}, \quad (2-48)$$

と表される。

屈折率の変動による $\Phi(K)$ あるいは $\langle \Delta n(r,t) \Delta n(r',t') \rangle$ を推定するためには温度および湿度の変動量を知る必要がある。乱流によるこれらの変動量は、乱流理論により調べられている。まず、変動量として一般的に良く用いられている風速変動について述べる。風速の平均値 (U, V, W)、変動成分が (u, v, w) である場の乱流のエネルギー ($E_t = (u^2 + v^2 + w^2)/2$) の平均値 ($\overline{E_t}$) の保存則は

$$\frac{\partial \overline{E_t}}{\partial t} = -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{g}{\Theta} \overline{w\theta} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{(e+P/\rho)w} + \epsilon_v, \quad (2-49)$$

と表される (竹内と近藤, 1981)。ここで Θ は平均温位, θ はその変動成分, 変数の上のバーは平均をあらわす。右辺第1項は平均流のシアーによるエネルギー生成項, 第2項が浮力による生成項, 第3項が拡散項, 第4項が分子粘性による消散項である。 ϵ_v は粘性によるエネルギー消散率で乱流運動が等方ならば

$$\epsilon_v = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}, \quad (2-50)$$

と表される。ここで ν は動粘性係数である。このように乱流エネルギーは、風速の変動および温度成層がある場合の浮力により発生する。乱流の発生当初、このエネルギーのスペクトル分布は小さい波数域に片寄っている。一方、エネルギーの消散は速度の空間微分に依存するため小さい渦で大きいと考えられる。すなわち大きい渦のエネルギーが小さい渦に伝えられていくことになり、乱流は様々な大きさの渦を持つようになる。このエネルギーの伝達を行うのが慣性力である。高いレイノルズ数の流れにおいては乱流の発生当初のエネルギーを持つ小さな波数と粘性による消散が起こる大きな波数は離れている。このような場合、高波数の変動成分は、乱流の発生状態には依存せずまた等方に近づき、統計的に平衡な状態になっていると考えられる (島貫, 1982)。この波数領域を普遍平衡領域と呼ぶ。この領域の低波数側にエネルギーが流入し高波数側から同量のエネルギーが消散していく。従ってこの領域の渦の特性は、エネルギー消散量 ϵ_v および消散の起こる波数を示す ν (エネルギー消散量が同じ場合 ν が大きいと消散の起こる波数は小さく

なる)の2パラメータにより一義的に決定できると考えられる。これが普遍平衡の仮説である (Batchelor, 1953)。この2つのパラメータから長さおよび速度の次元を持つパラメータを作ると

$$L = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon_\nu} \right)^{1/4}, \quad (2-51)$$

$$U = \left(\nu \epsilon_\nu \right)^{1/4}, \quad (2-52)$$

となる。 L はコロモゴロフの長さと呼ばれている。この2つから単位波数当たりのエネルギー $F(K)$ は

$$F(K) = U^2 L \psi(KL), \quad (2-53)$$

と表される。 ψ は無次元量で普遍関数と呼ばれている。

レイノルズ数が十分大きい場合、平衡領域の中間にエネルギーの発生、粘性消散のほとんど起こらない領域ができる。この領域では慣性力によるエネルギーの波数間の伝達が支配的で慣性小領域と呼ばれている。粘性消散にも無関係なためこの領域では、 ϵ_ν のみによりその特性は一義的に決まる。この領域のエネルギースペクトルは次元解析から

$$F(K) = F_0 \epsilon_\nu^{2/3} K^{-5/3}, \quad (2-54)$$

といわゆる $-5/3$ 乗法則になる。ここで F_0 は定数である。(2-43)と(2-54)により Φ と乱流場の関係が得られる。

$\Phi(K)$ を求めるために構造関数 (structure function) $D(\Delta r)$ を導入する。速度 u の構造関数は

$$D_v(\Delta r) \equiv \langle [u(r+\Delta r) - u(r)]^2 \rangle = \langle u(\Delta r)^2 \rangle - 2\langle u(r+\Delta r)u(\Delta r) \rangle + \langle u(r+\Delta r)^2 \rangle. \quad (2-55)$$

空間的に均一なランダム場では r には依らないので

$$\langle u(\Delta r)^2 \rangle = \langle u(r+\Delta r)^2 \rangle, \quad (2-56)$$

となり、

$$D_v(\Delta r) = 2[R(0) - R(\Delta r)], \quad (2-57)$$

と相関関数は構造関数で表されることになる。構造関数を用いる利点は、非等方性の強い大きい渦の影響を取り除けることにある。慣性小領域では乱流場の統計量は前述したように ϵ_ν のみで

決まる。 ϵ_v の次元は $[L^2/T^3]$ (L : 距離, T : 時間) を持つため, u の構造関数 D は次元解析により次の様な形を取る。

$$D_u(\Delta r) = C_u^2 \epsilon_v^{2/3} \Delta r^{2/3}, \quad (2-58)$$

ここで C_u は定数。屈折率の構造関数も同様にして

$$D_n(\Delta r) = C_n^2 \Delta r^{2/3}, \quad (2-59)$$

ここで, C_n^2 は構造パラメータ (定数: structure parameter (constant)) と呼ばれている定数で, $L^{-2/3}$ の単位を持っている。また, 前述したように1次元のスペクトル密度 $F(k)$ は波数積分すると $(\Delta n)^2$ となるので

$$F(K) = 4\pi K^2 \Phi(K) = C_f K^{-5/3}, \quad (2-60)$$

の形となる。 $C_f \approx C_n^2 / 2.4$ と言われている (Silverman, 1956)。これから

$$\Phi(K) = 0.033 C_n^2 K^{-11/3}, \quad (2-61)$$

と表される。

ブラッグの反射条件 $k_0 = K/2$ を用いると, reflectivity は

$$\eta = 0.38 C_n^2 \lambda^{-1/3}, \quad (2-62)$$

と良く知られた式になる。なお, 前述したように $\Phi(K)$ は $K=2k_0$ で大きいピークとなるため (2-45) の積分をピークの値で近似している。

2.4 構造パラメータ

ある保存量 p の構造パラメータ C_p^2 は

$$C_p^2 = a^2 \epsilon_v^{-1/3} K_p \left(\frac{d}{dZ} \langle p \rangle \right)^2, \quad (2-63)$$

と表される (Tatarski, 1971, p73)。ここで $\langle p \rangle$, K_p はそれぞれ物理量 p のアンサンブル平均および乱流拡散係数である。 a は無次元の定数である。屈折率についても保存量を導けば上の式により構造パラメータが得られる。気体の屈折率は

$$n^2 \approx 1 + M_v a_r, \quad (2-64)$$

で近似される。ここで M_v は分子数密度で a_r は分子偏極に関係する率である。地上, 15°Cの標準

大気の屈折率は1.000325程度と1に近いので、屈折率 n の代わりに次式で定義される refractivity N が良く用いられる。

$$N = (n - 1) \times 10^6. \quad (2-65)$$

温度 T 、気圧 P および水蒸気分圧 e を用いて、(2-38) 式から refractivity は

$$N = \frac{77.6}{T} \left(P + \frac{4810e}{T} \right), \quad (2-66)$$

と表される (Bean and Dutton, 1966)。それ故、屈折率の保存量 (Potential refractive index: ϕ) は

$$\phi = \frac{77.6}{\theta} \left(P_0 + \frac{4810e_0}{\theta} \right), \quad (2-67)$$

と表される。ここで

$$\theta = T \left(\frac{P_0}{P} \right)^\alpha, \quad (2-68)$$

$$\alpha = \frac{(C_p - C_v)}{C_p}, \quad (2-69)$$

$$e_0 = e \frac{P_0}{P}, \quad (2-70)$$

ここで C_p 、 C_v は定圧比熱、定容比熱、 P_0 は基準高度の気圧である。散乱体の高度を基準高度とすると

$$C_N^2 \approx C_\rho^2, \quad (2-71)$$

となり

$$C_N^2 = a^2 \varepsilon \nu^{-1/3} K_f \times 10^{-12} \left(\frac{d}{dz} \langle \phi \rangle \right)^2, \quad (2-72)$$

となる。

C_N^2 は、式 (2-72) から屈折率の高度変化から求まることになる。しかし、屈折率は通常測定

されていない。一般に測定されている気象要素と C_n^2 の関係が導かれればより実用的になる。ある高度での温度、水蒸気、および気圧の fluctuation は独立とすると

$$dN = \frac{\partial N}{\partial T} dT + \frac{\partial N}{\partial e} de + \frac{\partial N}{\partial P} dP, \quad (2-73)$$

基準高度を散乱体の高度と設定すれば保存量を用いても同じ式となるため notation はここでは変えない。

$$\frac{\partial N}{\partial T} = -77.6 \frac{P}{T^2} - 7.46 \times 10^5 \frac{e}{T^3} = -b, \quad (2-74)$$

$$\frac{\partial N}{\partial e} = \frac{3.73 \times 10^5}{T^2} = c, \quad (2-75)$$

$$\frac{\partial N}{\partial P} = \frac{77.6}{T} = d, \quad (2-76)$$

から

$$N' = -bT' + ce' + dP', \quad (2-77)$$

ここで ' は平均値からの変動量を表す。これから屈折率の構造パラメータは、温度の構造パラメータ (C_T^2) や水蒸気 (C_e^2) そして気圧 (C_P^2) に対する値から

$$C_n^2 = b^2 C_T^2 + c^2 C_e^2 + d^2 C_P^2 - 2bcC_{Te}^2 - 2bdC_{TP}^2 + 2bdC_{eP}^2, \quad (2-78)$$

となる。気圧の fluctuation は水蒸気や温度の fluctuation より小さいので

$$C_n^2 \approx b^2 C_T^2 + c^2 C_e^2 - 2bcC_{Te}^2, \quad (2-79)$$

と近似できる (Gossard, 1977)。ここで C_{Te}^2 は Te の構造パラメータを示す。係数 b , c は大気の状態により異なるが熱帯の夏期の海洋性気団、高度 500 m では $b^2 = 2.24 \times 10^{-12}$, $c^2 = 17.8 \times 10^{-12}$, $2bc = 12.6 \times 10^{-12}$ と言われている。

2.5 分反射

分反射あるいはフレネル反射は、成層大気中に屈折率の急激な変化がある場合に起こる。その reflectivity は

$$\eta_f = \frac{1}{4\tau_w} \left[\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dn}{dz} \exp(-2jkz) dz \right]^2, \quad (2-80)$$

で表される (Gage *et al.*, 1981)。このため電波の波長が長いほど大きい反射となる。大気の状態にもよるが、気象研究所ウィンドプロファイラーではこの反射は小さいものと考えられる。

2.6 ドップラーシフト

ウィンドプロファイラーの目標物がアンテナに対して移動していると散乱電波の周波数は送信周波数からずれてくる。なお、以下では目標物とアンテナ間での減衰は無視している。送信波を

$$E_t = E_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0), \quad (2-81)$$

とする。 E_0 は定数、 ϕ_0 は送信波の位相、 ω_0 は電波の角周波数である。アンテナからの距離 r_0 に静止している目標物での散乱波は

$$E_r = BE_0 \sin[\omega_0(t - r_0/c) + \phi_0] = BE_0 \sin[\omega_0 t - \omega_0 r_0/c + \phi_0], \quad (2-82)$$

と表される。 B は定数である。プロファイラーでの受信波は

$$E_r = BE_0 \sin[\omega_0 t - 2\omega_0 r_0/c + \phi_0], \quad (2-83)$$

と表される。位相は変化するが周波数は当然ながら ω_0 と送信周波数と変わっていない。

一方、目標物が移動して時刻 t での距離が $r(t)$ にある場合、ウィンドプロファイラーでの受信信号は

$$E_r = BE_0 \sin[\omega_0(t - 2r(t)/c) + \phi_0], \quad (2-84)$$

と表され、目標物のプロファイラーに対する速度を $\pm v_r$ (正符号を遠ざかる方向) とすると

$$r(t) = r_0 \pm v_r t, \quad (2-85)$$

となり、(2-85) を (2-84) に代入すると

$$\begin{aligned} E_r &= BE_0 \sin[\omega_0(t - 2(r_0 \pm v_r t)/c) + \phi_0] \\ &= BE_0 \sin \left[\left(\omega_0 \mp 2\omega_0 \frac{v_r}{c} \right) t - 2\omega_0 \frac{r_0}{c} + \phi_0 \right], \end{aligned} \quad (2-86)$$

となる。静止している目標物のエコー (2-83) と比較すると位相が

$$w_0 \rightarrow w_0 \mp 2w_0 \frac{v_r}{c}, \quad (2-87)$$

ずれている。これがドップラーシフトである。周波数でこのシフト量 f_d を書くと

$$f_d = \mp \frac{2v_r}{\lambda}, \quad (2-88)$$

となる。 λ は波長である。目標物がアンテナに向かって速度 v で移動していると散乱波の周波数は送信周波数 $+2v/\lambda$ となる。10m/s で散乱体がアンテナに近づいている場合、波長 75cm の電波を用いるウインドプロファイラーでのドップラーシフトは 26.7Hz となる。

ウインドプロファイラーは、ある体積中に含まれる多数の散乱体からの散乱波の和を受信する。多数の散乱体がすべて同じ速度ベクトルを持つならば、受信信号は送信周波数から $2v/\lambda$ シフトした周波数にデルタ関数の様な鋭いピークを持つスペクトルとなる。しかし、一般に散乱体は種々な速度を持っているため様々な周波数のずれが生じ受信する周波数のスペクトルは広がる。この受信電力の周波数分布は、散乱体の視線速度すなわち周波数に、その散乱体による散乱電力の重みを付けた分布となる。これをドップラースペクトルという。何らかの方法でこのスペクトルの平均周波数を求めれば、観測している大気の平均風速が求まる。また、このドップラースペクトルは乱流の情報や降雨時には雨滴粒径分布等の情報も含まれている。